

# Iterationsverfahren und Operatorgleichungen in der Elastizitätstheorie

Rieder, Georg

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 14, 1962,  
S.109-343



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# Iterationsverfahren und Operatorgleichungen in der Elastizitätstheorie

Von Georg Rieder

Vorgelegt von Herrn H. Schaefer

(Eingegangen am 30. 11. 1962)

**Übersicht:** In dieser Arbeit werden zwei Prinzipien zur Aufstellung von Iterationsverfahren zur Lösung elastostatischer Probleme aufgestellt. Beide Prinzipien beruhen auf dem Ersatz des vorgelegten Problems in einem vorgegebenen Realkörper durch ein abgeändertes Problem in einem mathematisch einfacher zu behandelnden Grundkörper. Und zwar wird beim Prinzip der sukzessiven Belastung der Unterschied zwischen Realkörper und Grundkörper durch zusätzliche Kräfte, beim Prinzip der sukzessiven Verspannung durch zusätzliche Eigenspannungsquellen ausgeglichen. In beiden Fällen können die zusätzlichen Kräftebelebungen bzw. Eigenspannungsquellen iterativ angenähert werden; dadurch wird die Lösung des vorgelegten Problems im Realkörper auf eine Folge von Problemen in dem einfacheren Grundkörper zurückgeführt. Bei der Anwendung auf Randwertprobleme unterscheiden sich Realkörper und Grundkörper durch ihre Begrenzungen, bei der Anwendung auf Nichthomogenitätsprobleme durch ihre elastischen Eigenschaften.

In § 1 erläutern wir beide Prinzipien zunächst an ebenen Randwertproblemen. Da die praktische Anwendbarkeit von den Eigenschaften der nach diesen Prinzipien konstruierten Operatoren abhängt, wird in § 2 eine elementare Einführung in die Theorie der reellen *Hilbertschen* Räume gegeben, und es werden die in diesem Zusammenhang wichtigsten Sätze über symmetrische Operatoren angegeben. In § 3 werden — unter gleichzeitiger Anwendung auf Nichthomogenitätsprobleme — die Ergebnisse von § 2 auf den *Hilbert-Raum* der elastischen Zustände übertragen, ohne zunächst auf Einzelheiten der numerischen oder halbnumerischen Durchführung einzugehen. Dies geschieht in § 4 am Beispiel eines nach dem Prinzip der sukzessiven Belastung aufgestellten Iterationsverfahrens zur Lösung des Randwertproblems der belasteten Scheibe, welches bis zu den wichtigsten Einzelheiten der numerischen Durchführung diskutiert wird. In § 5 schließlich werden Methoden zur Beschleunigung der Konvergenz besprochen und das Verfahren von § 4 mit anderen numerischen oder halbnumerischen Verfahren verglichen.

Ein praktisch wichtiges Ergebnis folgt aus dem Vergleich des Verfahrens von § 4, einer Integralgleichungsmethode mit dem Rand als Integrationsgebiet, mit anderen Verfahren, welche mit diskreten Gitterpunkten im Inneren des ebenen Körpers arbeiten. Es ist bekannt, daß im zweiten Falle die finiten Gleichungssysteme mit wachsender Zahl der Gitterpunkte immer schlechter bestimmt werden. D. h., das Verhältnis des größten zum kleinsten Eigenwert der finiten Ersatzmatrix wird immer größer, was sich in steigender Anfälligkeit gegen Rundungsfehler äußert. Bei dem Verfahren von § 4 dagegen strebt das Spektrum der finiten Ersatzmatrix bei feinerer Unterteilung des Integrationsgebiets gegen das Spektrum eines beschränkten symmetrischen Operators, dessen größter Eigenwert in praktisch sinnvollen Fällen ein relativ kleines Vielfaches des kleinsten Eigenwertes ist. Da sich die Integralgleichungsmethode bequem den verschiedensten Bereichsformen anpassen läßt, erscheint die Methode von § 4 als ein sehr genaues und vielseitig anwendbares Verfahren.

*Summary: Two principles for setting up iteration procedures for solving problems in linear elastostatics will be established in this paper. Both principles rest upon replacing the problem posed in a given real body by a changed problem in a basic body that can be treated more simply mathematically. The difference between the real body and the basic body is being compensated for by additional forces after the principle of successive loading, and by additional sources of internal stress after the principle of successive distortion. In both cases the additional distributions of forces resp. sources of internal stress may be approximated by iteration; thereby the solution of the problem posed in the real body is being reduced to a sequence of problems in the simpler basic body. On application to boundary value problems, real body and basic body will differ by their boundaries, on application to non-homogeneity problems, they will differ by their elastic properties.*

*In § 1, we will explain both principles beforehand on plane boundary value problems. As the practical applicability depends on the properties of the operators constructed after those principles, there will be given in § 2 an elementary introduction into the theory of the real Hilbert space, and the theorems most important in this connection about symmetric operators will be stated. In § 3 these results will be transferred — under simultaneous application to non-homogeneity problems — to the Hilbert space of elastic states, without referring to details of numerical or half-numerical performance. This will be done in § 4 for the example of an iteration procedure established after the principle of successive loading for the boundary value problem of the plate loaded in its plane, where the discussion includes the most important features of numerical calculation. In § 5, finally, methods for improving convergence will be discussed, and the method of § 4 will be compared with other numerical and half-numerical procedures.*

*A practically important result follows from comparison of the procedure of § 4, an integral equation method with the boundary as integration domain, with other procedures that work with discrete mesh points in the interior of the plane body. It is well known that in the latter case the condition of the finite systems of linear equations becomes worse with growing number of mesh points. That is, the ratio of the greatest to the smallest eigenvalue of the finite matrix replacing the operator becomes bigger and bigger, which results in a growing sensitivity against round-off errors. For the procedure of § 4, on the other hand, the spectrum of the finite matrix tends with finer sub-division of the integration domain against the spectrum of a bounded symmetric operator, whose greatest eigenvalue is a comparatively small multiple of the smallest one in practical cases. As the method of integral equations may be adapted easily to a great variety of domains, the procedure of § 4 appears to be rather accurate and many-sided in applications.*

## **§ 1. Einige Prinzipien zur Aufstellung von Iterationsverfahren in der Elastostatik**

### **1.1 Allgemeines**

Es ist bekannt, daß die Lösung der Randwertaufgaben der linearen Elastostatik bereits für einen beliebig geformten, homogenen und isotropen Körper zu den schwierigsten Problemen der angewandten Mathematik gehört; nur für wenige einfache Oberflächenformen lassen sich geschlossene, durch Quadraturen oder einfache Reihenentwicklungen darstellbare Lösungen angeben [1–11]. Noch größer werden die Schwierigkeiten bei nicht-homogenen und anisotropen Körpern [12–22]; hier ist der Kreis der bisher gelösten Probleme noch stärker eingeschränkt.

Andererseits bringen es die steigenden Anforderungen an die Werkstoffausnutzung mit sich, daß in zunehmendem Maße genügend genaue und zuver-

lässige numerische Lösungen verlangt werden für Körper, deren Gestalt wesentlich von den relativ leicht zu behandelnden einfachen Formen abweicht, oder deren Material auch nicht mehr in grober Näherung als homogen und isotrop bezeichnet werden kann. In ähnlicher Weise steigen auch die Anforderungen der Werkstoffphysik an die Elastizitätstheorie, obwohl es sich hier meist nicht um Randwertprobleme, sondern um Eigenspannungs- und Nichthomogenitätsprobleme in unendlichen Medien handelt [8, 16, 19, 24–28]; hier sind indessen meist keine numerischen Lösungen für einen Einzelfall, sondern Näherungsfunktionen eines Parameters des Problems erwünscht, falls eine genügend einfache geschlossene Lösung nicht gefunden werden kann\*).

Eine für technische Zwecke vielfach brauchbare Methode ist das Differenzenverfahren, d. h. der Ersatz der Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen [2, 18, 29, 30]. Zur Erzielung einer ausreichenden Genauigkeit erfordern diese Methoden allerdings meist eine sehr große Anzahl von Gitterpunkten, und die Einbeziehung der Randbedingungen kann sehr schwierig werden, besonders wenn die Körperform schlecht in das Gitternetz einzupassen ist. Eine andere Möglichkeit, zu einem finiten Gleichungssystem in einem Gitternetz zu gelangen, bieten die direkten Methoden der Variationsrechnung [31, 32]. Auch weitergehende Aussagen der Funktionalanalysis wurden in Verbindung mit einem finiten Gleichungssystem für diskrete Gitterpunkte angewendet [33].

Bei einer anderen Gruppe von Verfahren wird die Lösung für den ganzen Körper in Form von Funktionenreihen angegeben; bei Randwertproblemen in homogenen Körpern führt hier die direkte Lösung des zugehörigen Variationsproblems auf die Verfahren von *Ritz* und *Trefftz* [2]. Besonders bemerkenswert ist die Orthogonal-Entwicklung nach *Bergman* [36–39], bei der für jede Körperform ein vollständiges System von — in einem mit Hilfe der elastischen Energie definierten Sinne — orthogonalen Funktionen durch einen *Gram-Schmidt*-Prozeß bestimmt wird. Praktisch wird jeweils eine begrenzte Anzahl dieser Funktionen aus den Orthogonalitätsbedingungen in einer endlichen Anzahl von Randpunkten näherungsweise numerisch berechnet. Verallgemeinerungen finden sich bei *Prager*, *Synge*, *Diaz*, *Greenberg*, *Weinstein* [33–35, 37, 123–125].

Eng verwandt mit den Reihenentwicklungen sind die Iterationsverfahren; sie lassen sich — falls man nicht in der für numerische Zwecke günstigeren „aufsummierten“ Form rechnet — auffassen als eine Reihenentwicklung, bei der die einzelnen Reihenglieder durch einen Iterationsprozeß auseinander hervorgehen. Zur Aufstellung derartiger Iterationsverfahren kommen vor allem zwei Methoden in Frage. Die eine ist mehr mathematischer Natur und geht aus von einer Formulierung des Randwertproblems als Integralgleichungssystem [2, 3, 5, 40–46]; ausgehend von diesen Integralgleichungen kann man dann über die *Neumannsche* Reihe oder den *Schwarzschen* Algorithmus zu Iterationsverfahren gelangen [2, 3, 40, 44].

Der andere Weg geht von mechanischen Überlegungen aus. Hier macht man sich ein fertig ausgebildetes Lösungsverfahren in einem einfach gestalteten „Grundkörper“ zunutze und sucht die Lösungen im vorgelegten „Realkörper“

\*) Vgl. z. B. [25], wo die Abhängigkeit der elastischen Energie von der Aufspaltung einer Versetzung in einem unendlichen, homogenen und anisotropen Medium benötigt wird.



durch eine Reihe von Lösungen im Grundkörper auszudrücken. Die mathematische Formulierung kann dabei zunächst offen bleiben; *Babuška* [47] benutzt z. B. diesen Grundgedanken nicht zur Aufstellung eines Iterationsverfahrens, sondern zur Gewinnung einer funktionalen „Taylor-Entwicklung“ für den Fall, daß Realkörper und Grundkörper nicht zu stark voneinander abweichen. Andere Autoren [40, 44, 45, 48, 49] gelangen auf diesem Wege wiederum zu einem System von Integralgleichungen, deren Kernfunktionen vielfach, aber durchaus nicht immer, aus den singulären Lösungen des Differentialgleichungssystems im unendlichen Medium gewonnen werden.

Diese Verwendung des unendlichen Mediums mit seinen singulären Störungen [6, 27, 33, 43, 48, 51, 52, 53] als Grundkörper ist im analogen Fall der Potentialtheorie längst bekannt und wird häufig zur Gewinnung numerischer Verfahren herangezogen [54–58]; der erste Versuch, diese Methoden auf die ebene Elastizitätstheorie zu übertragen, stammt wohl von *Miche* und *Weinel* [49]. Allerdings ist das *Miche-Weinelsche* Verfahren in den Originalarbeiten noch nicht hinreichend begründet; in dieser Arbeit wird versucht, diese Begründung wenigstens teilweise nachzuholen und gleichzeitig den Problemkreis abzugrenzen, auf den dieses — mit der Einführung elektronischer Rechenmaschinen durchaus wieder aktuell gewordene — Verfahren anwendbar ist. *Hetényi* [50] verwendet als Grundkörper für eine iterative Lösung von Randwertproblemen am unendlichen rechtwinkligen Keil die Halbebene; sein Ergebnis stimmt mit dem etwa gleichzeitig von *Nečas* ([3], S. 316) auf mehr formalem Wege gewonnenen Resultat überein. Dieses Beispiel zeigt die enge Verwandtschaft des *Schwarzschen* Algorithmus [3] mit dem „Prinzip der sukzessiven Belastung“, wie es *Hetényi* [50] verwendet und wie wir es unter der nächsten Ziffer allgemein formulieren werden.

Wir werden uns in dieser Arbeit mit der Aufstellung von Iterationsverfahren auf Grund mechanischer Überlegungen beschäftigen; sie beruhen auf dem „Prinzip der sukzessiven Belastung“, dem „Prinzip der sukzessiven Verspannung“ oder einer Kombination dieser beiden Prinzipien. Als Beispiel wird die randbelastete isotrope Scheibe besonders ausführlich behandelt. Es werden einige hinreichende und notwendige Konvergenzbedingungen aufgestellt und weiter Beziehungen zur Variationsrechnung, zur *Bergmanschen* Reihenentwicklung und zur Theorie symmetrischer bzw. symmetrisierbarer Operatoren im *Hilbert-Raum* nachgewiesen. Diese Überlegungen sind auch für die praktische Rechnung wichtig insofern, als sie die Übertragung bekannter Methoden zur Konvergenzbeschleunigung auf die vorliegenden Iterationsverfahren gestatten. Wir werden diese Überlegungen so weit als möglich unabhängig von der speziellen mathematischen Formulierung des Randwertproblems durchführen. Bei numerischen Lösungen tritt naturgemäß die Darstellung durch ein System von Integralgleichungen in den Vordergrund; grundsätzlich gelten jedoch die meisten Überlegungen auch dann noch, wenn für die Lösung der einzelnen Hilfsprobleme im Grundkörper andere Verfahren als etwa die Integration mit Hilfe einer *Greenschen* Funktion herangezogen werden. Denn der Grundgedanke der hier beschriebenen Iterationsverfahren besteht darin, daß die Lösung des vorgelegten Problems im Realkörper auf die Lösung einer Reihe von Problemen in dem mathematisch einfacher zu behandelnden Grundkörper zurückgeführt wird. Dabei ist das Lösungsverfahren für die einzelnen Teil-

probleme von sekundärer Bedeutung; die Wahl der Lösungsmethode ergibt sich von Fall zu Fall aus Zweckmäßigkeitsüberlegungen. Neben Integraldarstellungen kommen hier vor allem geschlossene Lösungen oder genügend rasch konvergierende Reihen in Frage.

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit grundsätzlich nur mit Problemen der linearen Elastostatik, setzen also eine lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung im Grundkörper und im Realkörper voraus und betrachten nur kleine Verformungen. Eine Erweiterungsmöglichkeit auf nichtlineare Probleme ergibt sich aus der bereits von anderen Autoren vorgeschlagenen Annäherung eines nichtlinearen Problems durch eine Folge linearer Probleme [28, 83, 84]. Dieser Hinweis mag hier genügen; Konvergenzkriterien ergeben sich im nichtlinearen Fall aus den Bemerkungen im Anschluß an (2.6.14), S. 158.

## 1.2 Das Prinzip der sukzessiven Belastung

Wir erläutern dieses Prinzip zunächst am Beispiel der randbelasteten dünnen Scheibe (Abb. 1.2.1). Es sei eine von der Kurve  $S^+$  berandete, homogene Scheibe  $K^+$  („Realkörper“) gegeben und auf dem Rande  $S^+$  eine ebene Kräfte-

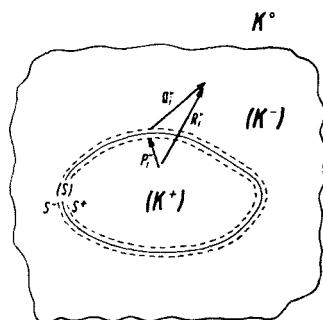


Abb. 1.2.1.

Zum Iterationsverfahren bei der randbelasteten Scheibe

belegung  $[P_i]$  ( $i = 1, 2$  bzw.  $x, y$ ; auch eine Zerlegung des Vektors  $[P_i]$  in eine Normalkomponente  $[P_n]$  und eine Tangentialkomponente  $[P_t]$  ist denkbar, wobei die Normalkomponente positiv sein möge, wenn sie aus  $K^+$  herausweist, und die Tangentialkomponente, wenn das Innere von  $K^+$  für sie zur Linken liegt). Die Randkurve  $S^+$  und die Kräftebelegung  $[P_i]$  mögen gewissen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen genügen derart, daß das Randwertproblem zur Ermittlung des Spannungsfeldes in  $K^+$  eine eindeutige Lösung besitzt; die Kräftebelegung  $[P_i]$  auf  $S^+$  sei ferner ein Gleichgewichtssystem, da anders eine solche Lösung im Rahmen der Elastostatik nicht möglich ist.

Für ein beliebig geformtes  $K^+$  wird eine geschlossene Lösung oder eine rasch konvergente Reihenentwicklung normalerweise nicht zur Verfügung stehen; wir suchen deshalb der Lösung näher zu kommen, indem wir in eine größere Scheibe die zu  $S^+$  kongruente Kurve  $(S)$  einzeichnen und auf dieser die Kräftebelegung  $[P_i]$  anbringen. Die neue, größere Scheibe mit der eingezeichneten Kurve  $(S)$  werde als „Grundkörper“  $K^0$  bezeichnet, das mit  $K^+$  kongruente „Innere“ von  $(S)$  als Teilgebiet  $(K^+)$  von  $K^0$  und das „Äußere“ von  $(S)$  als

Teilgebiet ( $K^-$ ) von  $K^\circ$ . Entfernt man aus dem Grundkörper  $K^\circ$  das Teilgebiet ( $K^+$ ), so bleibt der „Differenzkörper“  $K^-$  mit der zu ( $S$ ) und  $S^+$  kongruenten Randkurve  $S^-$  übrig; Realkörper  $K^+$  und Differenzkörper  $K^-$  sind also so erklärt, daß man aus ihnen durch Zusammenschweißen in den Randkurven gerade den Grundkörper  $K^\circ$  erhält.

Nun denken wir uns das Spannungsfeld der Kräftebelegung  $[P_i]$  auf ( $S$ ) in  $K^\circ$  ermittelt; dieses wird natürlich im allgemeinen nicht mit dem gesuchten Spannungsfeld der Kräftebelegung  $[P_i]$  auf  $S^+$  an  $K^+$  identisch sein; insbesondere sind auch diejenigen Teile von ( $S$ ) im allgemeinen nicht frei von Schub- und Normalspannungen, auf denen die gegebene Kräftebelegung verschwindet, wie es doch die Randbedingungen des ursprünglichen Problems für  $K^+$  verlangen [50]. Denn die Kräftebelegung  $[P_i]$  auf ( $S$ ) in  $K^\circ$  wird ja nicht allein vom Innengebiet ( $K^+$ ), sondern teilweise auch vom Außengebiet ( $K^-$ ) aufgenommen, und in den lastfreien Teilen von ( $S$ ) beeinflussen sich ( $K^+$ ) und ( $K^-$ ) infolge ihrer materiellen Verbindung gegenseitig in ihrer Verformung. Die Anteile der Kräftebelegung  $[P_i]$  auf ( $S$ ) in  $K^\circ$ , welche von ( $K^+$ ) bzw. ( $K^-$ ) aufgenommen werden, bezeichnen wir mit  $P_i^0$  bzw.  $Q_i^0$ ; man erhält sie im Gedankenversuch als diejenigen Kräftebelegungen an  $S^+$  bzw.  $S^-$ , die man nach dem Zerschneiden von  $K^\circ$  an  $K^+$  und  $K^-$  anbringen muß, um den ursprünglichen, durch  $[P_i]$  auf ( $S$ ) in  $K^\circ$  hervorgerufenen Spannungs- und Verzerrungszustand aufrechtzuerhalten. Es gilt

$$P_i^0 + Q_i^0 = [P_i] \quad (1.2.1)$$

Das vorgelegte Randwertproblem ist offenbar dann gelöst, wenn es gelingt, die Kräftebelegung auf ( $S$ ) in  $K^\circ$  derart abzuändern, daß der vom Innengebiet ( $K^+$ ) aufgenommene Teil gerade mit der gegebenen Kräftebelegung  $[P_i]$  übereinstimmt, und wenn es ein Verfahren gibt, welches das Spannungsfeld einer Kräftebelegung auf ( $S$ ) in  $K^\circ$  einfach zu berechnen gestattet. Der Grundkörper  $K^\circ$  muß also von genügend einfacher Beschaffenheit sein; Nečas ([3], S. 316) und Hetényi [50] verwenden z. B. als Grundkörper die Halbebene. In den meisten Fällen, insbesondere bei numerischen Rechnungen für endliche Realkörper, erscheint jedoch die elastische Vollebene als Grundkörper zweckmäßiger.

Wir versuchen nun unserem Ziel auf iterativem Wege näherzukommen. Bringt man auf ( $S$ ) in  $K^\circ$  zusätzlich zu  $[P_i]$  den vom Außengebiet aufgenommenen Anteil  $Q_i^0$  nach (1.2.1) an, so erscheint es einleuchtend, daß ( $K^+$ ) in den Teilen von ( $S$ ), in denen  $[P_i]$  verschwindet, wenigstens teilweise entlastet wird (denn dort sind  $P_i^0$  und  $Q_i^0$  entgegengesetzt gleich [50], und daß auch in den übrigen Teilen von ( $S$ ) der vom Innengebiet ( $K^+$ ) aufgenommene Anteil sich der gegebenen Belastung  $[P_i]$  besser angleicht. Natürlich wird man auch mit diesem zweiten Schritt die exakte Lösung nicht erreichen; mit der verbleibenden Belastung des Außengebiets kann man jedoch wieder genau so verfahren. Auf diese Weise gelangt man zu einer Iterationsvorschrift, nach welcher die Belastung des Innengebietes ( $K^+$ ) durch sukzessive Einführung neuer Belastungen auf ( $S$ ) in  $K^\circ$  der gegebenen Kräftebelegung  $[P_i]$  angenähert wird. Daß dieses Verfahren konvergiert, erscheint plausibel, wenn man sich überlegt, daß sich der Grundkörper  $K^\circ$  gegenüber einer Kräftebelegung auf ( $S$ ) sicher „steifer“ verhalten wird als der durch Herausnahme von ( $K^+$ ) geschwächte Differenz-

körper  $K^-$ ; an einem steiferen Körper leistet aber dieselbe Kräftebelegung weniger Arbeit; das hervorgerufene Spannungsfeld hat somit eine geringere Energie. Nun wird aber nach unserer Iterationsvorschrift bei jedem Schritt eine zunächst nur auf  $(K^-)$  wirkende Kräftebelegung beim Übergang zum nächsten Schritt auf den steiferen Grundkörper  $K^\circ$  angewendet; die elastischen Energien der nacheinander aufgebrachten Korrekturbelastungen auf  $(S)$  in  $K^\circ$  müssen also abnehmen. Daß damit auch die Korrekturbelastungen selbst in einem für die Konvergenz des Verfahrens hinreichendem Maße abnehmen, bleibt freilich noch zu zeigen. Wir werden diese Überlegungen später präzisieren und zu einem Konvergenzbeweis ausbauen.

Zunächst fassen wir die Iterationsvorschrift in Formeln. Mit

$$R_i^0, R_i^1, \dots, R_i^r, \dots \quad (1.2.2)$$

bezeichnen wir die nacheinander auf  $(S)$  in  $K^\circ$  aufzubringenden Kräftebelegungen, und für ihre Summen schreiben wir abkürzend

$$[R_i]^n = \sum_{v=0}^n R_i^v \quad (1.2.3)$$

Falls diese Summen einen Grenzwert besitzen, schreiben wir dafür

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [R_i]^n = [R_i] \quad (1.2.4)$$

Den vom Innengebiet  $(K^+)$  aufgenommenen Anteil der Kräftebelegung  $R_i^r$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  bezeichnen wir mit  $P_i^r$ , und den vom Außengebiet  $(K^-)$  aufgenommenen Anteil mit  $Q_i^r$ . Es gilt

$$P_i^r + Q_i^r = R_i^r \quad (1.2.5)$$

Wie  $Q_i^r$  aus  $R_i^r$  bestimmt werden kann, zeigen wir später (§ 4.4).

Denken wir uns also  $Q_i^r$  jeweils auf eine später noch zu präzisierende Weise aus  $R_i^r$  bestimmt, so läßt sich die Iterationsvorschrift zusammenfassen in den beiden Gleichungen

$$R_i^0 = [P_i] \quad (1.2.6)$$

$$R_i^r = Q_i^{r-1} \quad (r \geq 1) \quad (1.2.7)$$

oder in der „aufsummierten Form“, d. h. nach Addition der ersten  $n+2$  Gleichungen

$$[R_i]^{n+1} = [P_i] + [Q_i]^n \quad (1.2.8)$$

Wie man aus der Linearität aller vorkommenden Operationen leicht folgert, geht  $[Q_i]^n$  aus  $[R_i]^n$  in derselben Weise hervor wie  $Q_i^r$  aus  $R_i^r$ . Für numerische Rechnungen ist die aufsummierte Form auf alle Fälle vorzuziehen, da sich hier die Rundungsfehler nicht von einem Schritt zum andern anhäufen können. Außerdem gestattet (1.2.8), mit einer geschätzten Näherungsfunktion für  $[R_i]$  zu beginnen und dadurch die zur Erzielung der gewünschten Genauigkeit erforderliche Rechenzeit wesentlich abzukürzen.

Daß die durch Aufsummieren von (1.2.5) erhaltene Belastung des Innengebiets ( $K^+$ ) nach dem  $n$ -ten Schritt

$$[P_i]^n = [R_i]^n - [Q_i]^n \quad (1.2.9)$$

wenn überhaupt, dann nur gegen die gegebene Kräftebelegung  $[P_i]$  konvergieren kann, folgt aus (1.2.8), wenn man alle Glieder der linken Summe bis auf das letzte nach rechts schafft; mit (1.2.9) folgt

$$R_i^{n+1} = [P_i] - [P_i]^n \quad (1.2.10)$$

wo die linke Seite im Konvergenzfall gegen Null strebt. Falls also das Verfahren konvergiert (was später gezeigt wird), konvergiert es gegen die gesuchte Kräftebelegung  $[R_i]$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$ , welche im Teilbereich ( $K^+$ ) von  $K^\circ$  dieselben Spannungen hervorruft wie die gegebene Kräftebelegung  $[P_i]$  auf  $S^+$  im Realkörper  $K^+$ . Mit anderen Worten:  $[R_i]^n$  konvergiert gegen die Lösung der Gleichung

$$[R_i] - [Q_i] = [P_i] \quad (1.2.11)$$

wo  $[P_i]$  gegeben und  $[Q_i]$  derjenige Anteil der Kräftebelegung  $[R_i]$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  ist, welcher vom Außengebiet ( $K^-$ ) aufgenommen wird. Falls dann  $K^\circ$  von genügend einfacher Gestalt ist, kann man aus  $[R_i]$  das gesuchte Spannungsfeld bestimmen, z. B. über das Verschiebungsfeld dieser Kräftebelegung in  $K^\circ$ , welches sich wiederum mit Hilfe der Fundamentallösung für die Einzelkraft berechnen läßt, wenn man als Grundkörper die Vollebene gewählt hat ([2-6]; vgl. auch § 4).

Das Verfahren läßt sich auch ohne weiteres auf räumliche Probleme übertragen;  $S^+$  bedeutet dann nicht mehr die Randkurve, sondern die Oberfläche des Realkörpers  $K^+$ , und als Grundkörper  $K^\circ$  eignet sich z. B. der Vollraum mit der einbeschriebenen, zu  $S^+$  kongruenten, geschlossenen Fläche  $(S)$ . Fundamentallösungen für den Vollraum finden sich in [1, 2, 33, 43, 48, 51]; allerdings erfordert die numerische Behandlung der Singularitäten des Kerns noch weitere Untersuchungen, falls man  $Q_i^r$  aus  $R_i^r$  mit Hilfe eines Integraloperators bestimmen will (vgl. § 4.4, Fußnote S.261). Relativ einfach erscheint dagegen der Fall der Platte; hier sind die Kräftebelegungen  $P_i^r$  und  $Q_i^r$  sinngemäß zu ersetzen durch Biege- und Drillmomente an den Rändern  $S^+$  und  $S^-$ , und die Kräftebelegungen  $R_i^r$  durch singuläre Momentenbelegungen auf  $(S)$  in  $K^\circ$ . Geeignete Fundamentallösungen für die unendliche Platte als Grundkörper finden sich z. B. in [59-61]; die auftretenden Singularitäten bei Einführung eines Integraloperators sind vom selben Typ wie bei der ebenen Scheibe (vgl. auch § 1.3 und § 4.6).

Schließlich läßt sich das Prinzip der sukzessiven Belastung auch zur Lösung von Problemen der Elastostatik in nicht-homogenen Medien verwenden; an die Stelle von Kräftebelegungen auf der geschlossenen Kurve bzw. Fläche  $(S)$  treten dann räumlich verteilte Kraftdichten im homogenen Grundkörper  $K^\circ$ . Die Aufstellung von Iterationsverfahren zur Lösung von Nichthomogenitätsproblemen soll später ausführlich behandelt werden (§ 3.5-8).

### 1.3 Das Prinzip der sukzessiven Verspannung

Wir erläutern dieses Prinzip zunächst am Beispiel einer dünnen, homogenen Scheibe, dem Realkörper  $K^+$ , auf deren Rand  $S^+$  die Verschiebung  $[a_i]$  vorgeschrieben ist. Wie in § 1.2 und Abb. 1.2.1 führen wir einen Grundkörper  $K^\circ$  und einen Differenzkörper  $K^-$  ein; auch die Symbole  $(S)$  und  $S^-$  haben wieder dieselbe Bedeutung. Um die gegebene Verschiebung  $[a_i]$  von  $S^+$  an  $K^+$  und das infolge dieser auf dem Rande  $S^+$  aufgezwungenen Verschiebung in  $K^+$  auftretende Spannungsfeld anzunähern, gehen wir nun in der folgenden Weise vor.

Statt wie in § 1.2 auf der Kurve  $(S)$  in  $K^\circ$  eine Belastung anzubringen, zerschneiden wir den Grundkörper  $K^\circ$  durch einen Schnitt längs  $(S)$  in Realkörper  $K^+$  und Differenzkörper  $K^-$ . Nun verschieben wir den Rand  $S^+$  des Realkörpers  $K^+$  in jedem Punkt um die Strecke  $[a_i] = [a_i(s)]$  relativ zu  $S^-$ , wo  $s$  die von einem festen Punkt aus gerechnete Bogenlänge der Kurve  $(S)$  ist. In dieser relativen Lage verschweißen wir wieder die beiden Schnittländer  $S^+$  und  $S^-$ , wobei wir bei Bedarf Material einfügen oder entfernen. Dieser Vorgang entspricht der Einführung eines *Weingarten-Somiglianaschen* Distorsionszustandes auf  $(S)$  in  $K^\circ$  ([27], S. 12; [52]), und dieser wiederum entspricht einer kontinuierlichen Verteilung *Volterrascher* Distorsionszustände auf  $(S)$ . Und zwar handelt es sich in diesem Falle speziell um Stufenversetzungen, welche die Scheibe  $K^\circ$  in  $(S)$  senkrecht durchstoßen; ihre Dichte, gemessen in „*Burgersvektor* je Längeneinheit“ auf der Kurve  $(S)$ , ist

$$[\tilde{P}_i] = \left[ \frac{\partial a_i}{\partial s} \right] \quad (i \triangleq x, y) \quad (1.3.1)$$

Hier entspricht das Vorzeichen der üblichen Konvention der Versetzungstheorie [28], wenn die Einheitsvektoren  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{f}$  ein Rechtssystem bilden und  $\mathbf{f}$  als Einheitsvektor der Richtung der Versetzungslinien senkrecht zur Scheibenfläche genommen wird. Dabei ist  $\mathbf{n}$  der von  $K^+$  nach  $K^-$  weisende Normaleneinheitsvektor auf  $(S)$  und  $\mathbf{t}$  der Tangenteneinheitsvektor an  $(S)$ ; seine Orientierung sei so bestimmt, daß der Bereich  $(K^+)$  zur Linken liegt. Man verifiziert (1.3.1), indem man einen *Burgers-Umlauf* um ein Teilstück von  $(S)$  in  $K^\circ$  ausführt und den zugehörigen Verschiebungssprung berechnet [27, 52].

Nun denken wir uns den Spannungs- und Dehnungszustand bestimmt, welchen die Versetzungsbelegung (1.3.1) auf  $(S)$  in  $K^\circ$  hervorruft. Das Dehnungsfeld läßt sich dabei jeweils im Innern von  $(K^+)$  und im Innern von  $(K^-)$  aus einer Verschiebung ableiten; nur auf  $(S)$  selbst ist wegen der dort angebrachten Versetzungsverteilung (1.3.1) keine Verschiebung erklärt. Wir setzen

$$\tilde{R}_i^0 = [\tilde{P}_i] \quad (1.3.2)$$

und bezeichnen mit  $a_i^0$  den Grenzwert der Verschiebung unter der Einwirkung der Versetzungsbelegung  $\tilde{R}_i^0$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  bei Annäherung an  $(S)$  aus  $(K^+)$  und mit  $b_i^0$  den entsprechenden Grenzwert bei Annäherung an  $(S)$  aus  $(K^-)$ . Der Kürze wegen werden wir  $a_i^0$  auch die „Verschiebung des inneren Ufers  $S^+$  von  $(S)$ “ und  $b_i^0$  die „Verschiebung des äußeren Ufers  $S^-$  von  $(S)$ “ unter der Einwirkung der Versetzungsbelegung  $\tilde{R}_i^0$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  nennen.

Natürlich wird die Verschiebung  $a_i^0$  des inneren Ufers  $S^+$  unter der Einwirkung der Versetzungsbelegung  $\tilde{R}_i^0$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  im allgemeinen nicht mit der gegebenen Verschiebung  $[a_i]$  identisch sein; andernfalls wäre die Aufgabe bereits gelöst. Tatsächlich wird auch das äußere Ufer  $S^-$  bei der Einstellung des Gleichgewichtszustandes eine Verschiebung  $b_i^0$  erleiden, und es gilt offenbar

$$a_i^0 - b_i^0 = [a_i] \quad (1.3.3)$$

Man kann aber hoffen, der gegebenen Verschiebung  $[a_i]$  wenigstens näherzukommen, wenn man erneut einen Schnitt längs  $(S)$  führt, das innere Ufer  $S^+$  zusätzlich noch um  $-b_i^0$  relativ zum äußeren Ufer  $S^-$  verschiebt und in dieser neuen Lage wieder verschweißt. Dies entspricht der Einführung einer zusätzlichen Versetzungsbelegung

$$\tilde{Q}_i^0 = -\frac{\partial b_i^0}{\partial s}. \quad (1.3.4)$$

Auch jetzt wird das äußere Ufer  $S^-$  im allgemeinen wieder nachgeben und eine Verschiebung  $b_i^1$  erleiden, die man durch Einführung der zusätzlichen Versetzungsbelegung

$$\tilde{Q}_i^1 = -\frac{\partial b_i^1}{\partial s} \quad (i \triangleq x, y) \quad (1.3.5)$$

wenigstens teilweise zu beseitigen sucht. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann man versuchen, schließlich einer Versetzungsbelegung  $[\tilde{R}_i]$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  nahezukommen, welche am inneren Ufer  $S^+$  gerade die gegebene Verschiebung  $[a_i]$  hervorruft.

Setzt man allgemein in *Cartesischen* Koordinaten für  $a_i$

$$\tilde{P}_i^r = \frac{\partial a_i^r}{\partial s} \quad (1.3.6)$$

$$\tilde{Q}_i^r = -\frac{\partial b_i^r}{\partial s} \quad (1.3.7)$$

$$\tilde{R}_i^r = \tilde{P}_i^r + \tilde{Q}_i^r \quad (1.3.8)$$

so läßt sich ohne Schwierigkeiten zeigen, daß man bei der formelmäßigen Fassung des beschriebenen Iterationsverfahrens wieder auf die Iterationsvorschrift (1.2.6-8) kommt, und auch die übrigen Gleichungen von § 1.2 behalten ihre Gültigkeit. Nur die physikalische Interpretation ist verschieden: an die Stelle der Kräftebelegungen von § 1.2 treten Versetzungsbelegungen auf  $(S)$  in  $K^\circ$ .

Wir verzichten darauf, diese Gleichungen zu wiederholen, und bringen statt dessen eine andere physikalische Interpretation, welche die Verbindung herstellt zu den in § 3.6 mit Hilfe des Prinzips der sukzessiven Verspannung entwickelten Iterationsverfahren zur Lösung von Nichthomogenitätsproblemen. Nach einem Vorschlag von Kröner ([27], § 15) kann man die eingangs formulierte erste Randwertaufgabe auch als Entartungsfall eines Nichthomogenitätsproblems auffassen, indem man als Realkörper  $K^+$  z. B. eine unendliche Scheibe betrachtet, welche im Teilgebiet  $(K^+)$  zwar homogen elastisch, im

Außengebiet ( $K^-$ ) von ( $S$ ) aber völlig starr ist. Da in einem solchen Realkörper das äußere Ufer  $S^-$  von ( $S$ ) völlig unbeweglich ist, kommt es nun auf dasselbe heraus, ob man am inneren Ufer  $S^+$  von ( $S$ ) eine Verschiebung  $[a_i]$  vorschreibt, oder ob man die Versetzungsbelegung (1.3.1) auf ( $S$ ) in  $K^+$  anbringt. Tatsächlich läßt sich die Verschiebung  $[a_i]$  des inneren Ufers  $S^+$  in diesem Realkörper nicht ohne vorangehende Zerschneidung realisieren.

Der Grundkörper  $K^\circ$  wird wie bisher definiert, im einfachsten Fall somit als homogene unendliche Scheibe mit der eingezeichneten geschlossenen Kurve ( $S$ ), auf welcher die Versetzungsbelegungen  $\hat{R}_i^*$  angebracht werden. Dagegen betrachten wir jetzt als Differenzkörper  $K^-$  eine unendliche Scheibe, welche zwar im Außengebiet ( $K^-$ ) von ( $S$ ) homogen elastisch, im Innengebiet ( $K^+$ ) aber völlig starr ist. Der Differenzkörper stellt also jetzt insofern ein Gegenbild zum Realkörper dar, als nun elastische und starre Gebiete vertauscht sind.

Bringt man nun die gegebene Versetzungsbelegung  $[\hat{P}_i]$  auf ( $S$ ) statt im Realkörper  $K^+$  im Grundkörper  $K^\circ$  an, so entspricht dies dem nullten Iterationsschritt

$$\hat{R}_i^0 = [\hat{P}_i] \quad (1.3.9)$$

Als den auf das äußere Ufer  $S^-$  von ( $S$ ) in  $K^\circ$  entfallenden Anteil dieser Versetzungsbelegung definiert man nun  $\hat{Q}_i^0$  nach (1.3.4); offensichtlich bringt diese Versetzungsbelegung  $\hat{Q}_i^0$  auf ( $S$ ) im Differenzkörper  $K^-$  dieselbe Verzerrung des Außengebiets ( $K^-$ ) hervor wie die Versetzungsbelegung  $\hat{R}_i^0$  auf ( $S$ ) im Grundkörper  $K^\circ$ . Die elastische Energie des von  $\hat{Q}_i^0$  in  $K^-$  hervorgerufenen Verzerrungszustandes ist also sicher um die elastische Energie des Teilgebiets ( $K^+$ ) in  $K^\circ$  kleiner als die elastische Energie des von  $\hat{R}_i^0$  in  $K^\circ$  hervorgerufenen Eigenspannungszustandes. Der erste Iterationsschritt

$$\hat{R}_i^1 = \hat{Q}_i^0 \quad (1.3.10)$$

bedeutet nun, daß man die Versetzungsbelegung  $\hat{Q}_i^0$  statt im Differenzkörper  $K^-$  im Grundkörper  $K^\circ$  anbringt. Der Grundkörper  $K^\circ$  geht aber aus dem Differenzkörper hervor, indem man das starre Material im Teilgebiet ( $K^+$ ) durch homogenes elastisches Material ersetzt; er ist also, im Ganzen betrachtet, nachgiebiger als der Differenzkörper. Oder kürzer: Den Grundkörper  $K^\circ$  erhält man aus dem Differenzkörper  $K^-$  durch Aufweichung des Teilgebiets ( $K^+$ ). Damit ist aber bei festgehaltener Versetzungsbelegung auf ( $S$ ) eine teilweise Entspannung, also eine neuerliche Minderung der elastischen Energie verbunden. Entsprechende Überlegungen lassen sich für alle folgenden Iterationsschritte anstellen.

Beim Konvergenzbeweis ist nun zu zeigen, daß diese Verminderung der elastischen Energie bei jedem Iterationsschritt hinreicht, um daraus auf ein für die Konvergenz der Folge  $[\hat{R}_i]^n$  hinreichend rasches Verschwinden der Reihenglieder  $\hat{R}_i^n$  schließen zu können. Der Konvergenzbeweis folgt im wesentlichen demselben Schema, das in § 4 für das Iterationsverfahren (1.2.6-8) in voller Ausführlichkeit diskutiert wird; auch die Ergebnisse sind im wesentlichen dieselben. Nur sind die Formeln im einzelnen etwas anders gebaut, und die physikalische Interpretation der einzelnen Funktionen ist eine andere (vgl.



§ 4.6). Bei einem anderen Anwendungsbeispiel für das Prinzip der sukzessiven Verspannung bleiben aber sogar die Formeln in allen Einzelheiten völlig gleich wie bei dem in § 1.2 ausgeführten Beispiel der belasteten Scheibe; nur die Werte entsprechender Konstanten ändern sich mit der physikalischen Interpretation. Es ist dies der Fall der dünnen homogenen Platte mit vorgeschriebener Verschiebung und vorgeschriebener Normalableitung der Verschiebung auf dem Rand.

Bekanntlich kann man den Krümmungstensor einer Platte aus der Verschiebung  $a(x, y)$  senkrecht zur Plattenebene nach *Wieghardt* in derselben Weise ableiten wie die Spannungen einer Scheibe aus der *Airy*schen Spannungsfunktion  $F(x, y)$ ; im homogenen, isotropen Fall genügt auch  $a$  ebenso wie  $F$  der Bipotentialgleichung. Diese Analogie wurde von *Schaefer* weiter ausgebaut in der Weise, daß dem ebenen Verschiebungsvektor bei der Scheibe ein Spannungsfunktionsvektor bei der Platte gegenübergestellt wird; die entsprechenden Gleichungen bei der Platte gehen in dieser Analogie aus den Gleichungen bei der Scheibe hervor durch die Substitutionen

$$\frac{1}{E} \parallel \frac{E h^3 \mathcal{M}^2}{12 (\mathcal{M}^2 - 1)} \quad (1.3.11)$$

$$\mathcal{M} \parallel -\mathcal{M} \quad (1.3.12)$$

Hier ist  $E$  der Elastizitätsmodul,  $h$  die Plattendicke und  $\mathcal{M}$  die Querkontraktionszahl [59–61]. *Hoppe* [61] hat diese Überlegungen weiter ergänzt durch eine Gegenüberstellung entsprechender Singularitäten bei Scheibe und Platte; danach entspricht jeweils einer geometrischen Singularität bei der Scheibe eine statische Singularität bei der Platte und umgekehrt. Speziell entspricht nach *Hoppe* einer Einzelkraft bei der Scheibe der Drehsprungvektor einer die Plattenebene senkrecht durchstoßenden *Volterraschen* Distorsionslinie 2. Art [28, 52, 107] bei der Platte. Eine Belegung  $\tilde{R}_l$  mit derartigen Distorsionslinien längs einer Geraden auf einer Platte bedeutet einen Sprung in der Krümmung und Verwindung längs der Geraden derart, daß die Komponente der (in Bogenmaß je Längeneinheit zu messenden) „Drehsprungvektordichte“  $\tilde{R}_n$  senkrecht zur Geraden die zweite Ableitung des Verschiebungssprungs längs der Geraden, ihre Komponente  $\tilde{R}_l$  längs der Geraden den Sprung in der Verwindung, d. h. der gemischten zweiten Ableitung längs und senkrecht zur Geraden darstellt. Bei Belegungen auf gekrümmten Kurven erscheinen noch Glieder, die den Krümmungsradius der Kurve enthalten\*).

Definieren wir nun Realkörper  $K^+$ , Grundkörper  $K^\circ$  und Differenzkörper  $K^-$  bei der Platte ähnlich wie im Anschluß an (1.3.8) bei der Scheibe als unendliche Platten mit homogen elastischen und starren Teilgebieten, so lassen sich die weiteren Überlegungen für die Stufenversetzungen bei der Scheibe auf die *Volterraschen* Distorsionslinien 2. Art bei der Platte übertragen. Man erhält also ein Iterationsverfahren für Plattenprobleme, in welchem statt der Kräfte-

\*) Teilweise wurden diese Analogien auch zur experimentellen Spannungs-ermittlung benützt [165].

belegungen  $R_i$  Belegungen  $\tilde{R}_i$  senkrecht durchstoßender *Volterrascher* Distorsionslinien 2. Art auf  $(S)$  in  $K^\circ$  auftreten, und welches einer gegebenen Distorsionsbelegung  $[\tilde{P}_i]$  im Konvergenzfalle eine Distorsionsbelegung  $[\tilde{R}_i]$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  zuordnet derart, daß der Anteil  $[\tilde{P}_i]$  auf die Verformung des Innengebiets ( $K^+$ ) von  $K^\circ$  entfällt. Die für dieses Iterationsverfahren benötigten Formeln entsprechen in jeder Einzelheit den Formeln, die wir in § 4.3–5 für die belastete Scheibe entwickeln werden; nur die Konstanten sind nach (1.3.11–12) abgeändert.

Wir geben noch ohne Beweis an, wie die Ausgangs-Distorsionsbelegung  $[\tilde{P}_i]$  aus der gegebenen Verschiebung  $[a]$  und der gegebenen Ableitung  $\left[\frac{\partial a}{\partial n}\right]$  in Richtung der nach außen positiv genommenen Normalen auf  $S^+$  zu berechnen ist. Man erhält für die Normalkomponente der Drehsprungvektordichte  $[\tilde{P}_i]$  auf  $(S)$

$$[\tilde{P}_n] = \frac{\partial^2 [a]}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho} \left[ \frac{\partial a}{\partial n} \right] \quad (1.3.13)$$

und für die Tangentialkomponente

$$[\tilde{P}_t] = -\frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial a}{\partial n} \right] + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial [a]}{\partial s} \quad (1.3.14)$$

$\varrho$  ist der nach innen positiv genommene Krümmungshalbmesser der Kurve  $(S)$ .

Umgekehrt erlaubt die *Schaeffersche* Analogie eine Übertragung des Formelapparats des nach dem Prinzip der sukzessiven Verspannung entwickelten Iterationsverfahrens (1.3.1–10) für die Scheibe mit gegebener Randverschiebung auf ein Iterationsverfahren für die randbelastete Platte, das nach dem Prinzip der sukzessiven Belastung arbeitet (vgl. § 1.2, Schluß). Denn nach *Hoppe* [61] entspricht einer Stufenversetzung bei der Scheibe ein Einzelmoment bei der Platte, dessen Momentenvektor senkrecht zum *Burgers*-Vektor der analogen Stufenversetzung in der Plattenebene liegt. Man gewinnt so ein

Iterationsverfahren, bei welchem eine Momentenbelegung  $[\tilde{\tilde{R}}_i]$  auf  $(S)$  in der Platte  $K^\circ$  derart zu bestimmen ist, daß ihr auf das innere Ufer  $S^+$  von  $(S)$

entfallender Anteil gerade einer gegebenen Belegung  $[\tilde{\tilde{P}}_i]$  des Randes  $S^+$  einer (im Sinne von § 1.2 definierten) Platte  $K^+$  mit Biege- und Drillmomenten entspricht. Insgesamt können wir also mit Hilfe von nur zwei Formelsätzen nach der *Schaefferschen* Analogie vier Randwertprobleme an Scheibe und Platte iterativ lösen (vgl. auch § 4.6).

Der Übergang zur Anwendung des Prinzips der sukzessiven Verspannung auf Nichthomogenitätprobleme ergibt sich, wenn man bei Realkörper und Differenzkörper nach der zweiten, in dieser Ziffer eingeführten Definition die Starrheitsgebiete so weit aufweicht, daß sie zwar immer noch härter als die ursprünglich elastischen Teilgebiete sind, in ihren elastischen Eigenschaften aber

immerhin mit diesen vergleichbar werden. Wir kommen darauf in § 3.6 ausführlich zurück.

#### 1.4 Zur gleichzeitigen Anwendung beider Prinzipien

Wir haben in §§ 1.2–3 gesehen, daß sich das Prinzip der sukzessiven Belastung zur Aufstellung von Iterationsverfahren für Randwertprobleme der Elastostatik mit rein statischen Randbedingungen eignet, und das Prinzip der sukzessiven Verspannung zur Aufstellung von Iterationsverfahren für Randwertprobleme mit rein geometrischen Randbedingungen. Bei gemischten Randwertproblemen, d. h. einer zulässigen Kombination von statischen und geometrischen Randbedingungen, würde es naheliegen, beide Prinzipien gleichzeitig zur Konstruktion eines Iterationsverfahrens anzuwenden. Gemischte Randbedingungen liegen etwa vor bei der drehbar gelagerten Platte, oder bei einer Scheibe, deren Normalverschiebung auf dem Rand fest vorgegeben ist, während die Tangentialverschiebung frei ist und durch eine zusätzlich aufgebrachte Belastung beeinflusst werden kann. Von gemischten Randbedingungen spricht man auch, wenn auf verschiedenen Teilstücken der Oberfläche oder des Randes verschiedenartige Randbedingungen vorgegeben sind.

Die gleichzeitige Anwendung beider Prinzipien würde dann etwa in der Form zu erfolgen haben, daß man bei jedem Iterationsschritt die Abweichungen von den vorgeschriebenen statischen Bedingungen durch Korrekturbelastungen (Kräftebelegungen) und die Abweichungen von den vorgeschriebenen geometrischen Bedingungen durch Korrekturverspannungen (Belegungen mit *Vollerraschen* Distorsionszuständen) zu verringern sucht. Etwas derartiges werden wir bei der Anwendung auf Nichthomogenitätsprobleme in der „gemischten Iteration“ von § 3.7 ausführen, und es ist sehr wahrscheinlich, daß derartige gemischte Verfahren auch bei sinnvollen gemischten Randwertproblemen konvergieren würden.

Indessen läßt sich eine zufriedenstellende allgemeine Diskussion derartiger gemischter Verfahren bei Randwertproblemen nicht mit den relativ einfachen Mitteln von § 4 durchführen, welche bereits eine recht weitgehende Beurteilung der Verfahren von §§ 1.2–3 gestatten. Dies liegt hauptsächlich daran, daß den Überlegungen von § 4 die Eigenschaften symmetrischer Operatoren in einem reellen *Hilbert*-Raum zugrunde liegen, die wir im folgenden § 2 zusammenstellen und in § 3 auf Probleme der Elastostatik anwenden werden. Nun werden wir in § 3.7 finden, daß bei der Anwendung auf Nichthomogenitätsprobleme die gemischte Iteration auf unsymmetrische Operatoren führt; dasselbe ist bei der Anwendung auf gemischte Randwertprobleme zu erwarten.

Nun lassen sich die Ergebnisse von § 2 auch auf unsymmetrische Operatoren übertragen, wenn man den adjungierten Operator kennt; im Falle der Nichthomogenitätsprobleme von § 3.7 läßt er sich auch ohne grundsätzliche Schwierigkeiten definieren. Wie man im Falle gemischter Randwertprobleme vorzugehen hat, ist bisher nicht bekannt; vermutlich wird man die entsprechenden Überlegungen für die verschiedenen Typen gemischter Randwertprobleme jeweils neu anstellen müssen. Wir verzichten daher in dieser Arbeit auf die Behandlung gemischter Randwertprobleme.

## § 2. Die Darstellung des Iterationsverfahrens in einem reellen *Hilbert*-Raum. Symmetrische Operatoren

### 2.1 Allgemeines

Die praktische Mathematik bedient sich in neuerer Zeit in zunehmendem Maße zur Entwicklung und Beschreibung ihrer Verfahren des aus der Funktionalanalysis entnommenen Begriffs des Funktionenraums [29, 33–36, 62–65]. Danach wird jede der für die Lösung oder Approximation einer vorgelegten Aufgabe in Frage kommenden Funktionen aufgefaßt als ein „Element“ eines im allgemeinen unendlichdimensionalen Raumes, wobei man sich dieses Element als eine Art Vektor vorstellen mag. In der Tat gehören die endlich- und unendlichdimensionalen Vektorräume zu den „*Hilbert*-Räumen“, welche als einfachste Verallgemeinerung des gewöhnlichen, zwei- oder dreidimensionalen *Euklidischen* Raumes aufzufassen sind [62, 66, 67]. Der Vorteil dieser Darstellungsweise ist ein doppelter. Einerseits erlaubt sie eine knappe und klare formale Darstellung der mathematischen Überlegungen, andererseits kommt sie auch der Anschauung stark entgegen. Besonders *Prager* und *Synge* [34–36] machen ausgiebigen Gebrauch von der symbolischen zeichnerischen Darstellung; sie ist nach diesen Autoren „wirksam in der Anregung von Approximationsverfahren“, und „die Kraft dieser Methode liegt weitgehend in dem Anreiz für die geometrische Intuition“ ([34], Ziff. 1.3). Freilich dürfen die Ergebnisse elementargeometrischer Überlegungen nicht kritiklos auf den Funktionenraum übertragen werden; im Normalfall wird man ohne einen formalen Beweis nicht auskommen. „Bildliche Darstellung ist wesentlich für Entdeckung und schnelles Verständnis; formale Beweise geben die Sicherheit, daß sich unsere Intuition nicht geirrt hat, was gelegentlich möglich ist“ ([33], S. 12). Immerhin gilt wenigstens im speziellen Fall eines *Hilbert*-Raums „die gesamte *Euklidische* Geometrie in jedem linearen Unterraum ... mit einer endlichen Zahl von Vektoren als Basis“ ([34], Ziff. 3). Naturgemäß wird die Aussagekraft elementargeometrischer Überlegungen für allgemeinere Funktionenräume geringer; es wird sich jedoch herausstellen, daß sich die in dieser Arbeit behandelten Iterationsverfahren in einem *Hilbert*-Raum vollständig beschreiben lassen.

In Abb. 2.1.1 ist das Iterationsverfahren (1.2.6–7) symbolisch dargestellt; die Indizes  $i$  der Vektorkomponenten wurden dabei in der Beschriftung weggelassen. Jedes Reihenglied folgt aus dem vorhergehenden durch Anwendung eines „Operators“, welcher zu einer vorgegebenen Kräftebelegung  $R$  auf  $(S)$  in  $K^0$  den Anteil  $Q$  bestimmt, welcher vom Außengebiet ( $K^-$ ) aufgenommen wird. Entsprechende Darstellungen kann man auch für die Iterationsverfahren von § 1.3 finden.

Natürlich „wäre diese Darstellung der Spannungszustände durch Punkte des Funktionenraumes nichts weiter als ein ziemlich müßiges Spiel“ ([33], Introduction), ohne die sehr bemerkenswerten Übereinstimmungen im Verhalten der wirklichen Funktionen mit ihrer symbolischen geometrischen Repräsentation. Während nun *Prager* und *Synge* ihre Aufmerksamkeit vor allem auf die Extremalprinzipien und ihre geometrisch-symbolische Darstellung richten, befassen wir uns hier hauptsächlich mit den Operatoren, welche die in § 1 definierten Iterationsfolgen erzeugen. Es wird sich herausstellen, daß die

Operatoren der sukzessiven Belastung und der sukzessiven Verspannung im *Hilbert*-Raum der elastischen Zustände [33–37] jeweils beschränkt und selbstadjungiert, also kurz „symmetrisch“ sind und somit ein reelles und beschränktes Spektrum besitzen [62, 64, 66]. Diese Eigenschaft werden wir uns zunächst beim Konvergenzbeweis zunutze machen. Sie hat aber auch eine große praktische Bedeutung insofern, als sie die Übertragung der hochentwickelten Methoden zur Konvergenzbeschleunigung gestattet, welche für symmetrische (bzw. symmetrisierbare) Operatoren und Matrizen bekannt sind [31, 62–64, 68, 69]. Gleichzeitig läßt sich auf diesem Wege auch die Verbindung zu den Extremalprinzipien [1, 2, 31–37, 71, 123–125] der Elastizitätstheorie herstellen.

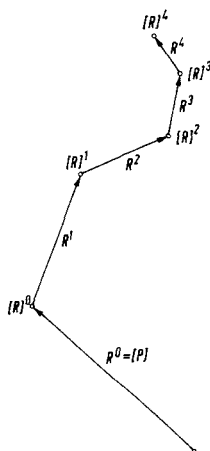


Abb. 2.1.1 Symbolische Darstellung des Iterationsverfahrens im Funktionenraum

Wir geben in diesem Paragraphen einen kurzen Abriss der allgemeinen Theorie symmetrischer Operatoren im reellen *Hilbert*-Raum, so weit wir sie für die Anwendungen in den folgenden Paragraphen benötigen. Vollständigkeit in der Darstellung und eine durchgehende, lückenlose Beweisführung kann in dem knappen Rahmen dieser Arbeit natürlich nicht angestrebt werden. Wir begnügen uns daher mit den zum Verständnis unbedingt notwendigen Erläuterungen und verweisen im übrigen auf die Lehrbücher und Monographien [29, 62–67, 73].

## 2.2 Der Fixpunktsatz

Daß in dem symbolischen Vektorzug von Abb. 2.1.1 die Summen  $[R]^n$  gegen einen „Fixpunkt“  $[R]$  konvergieren, falls etwa die Beträge (Längen) der einzelnen Reihenglieder  $R^n$  in geometrischer Progression oder stärker gegen Null streben, braucht an dieser Stelle wohl nicht besonders bewiesen zu werden. Ein solcher Beweis ergibt sich z. B. daraus, daß man den Fixpunkt  $[R]$  zu einem Operator, der die Summenfolge  $[R]^n$  in eindeutiger Weise aus  $[R]^0$  erzeugt, stets auf einen Kreis um den Punkt  $[R]^n$  einschränken kann, und daß die Radien dieser Kreise mit wachsendem  $n$  wenigstens in geometrischer Progression abnehmen. Führt man freilich diesen Beweis im einzelnen aus, so

zeigt sich, daß er einige grundlegende Eigenschaften des zweidimensionalen *Euklidischen* Raumes und seiner Metrik zur Voraussetzung hat, welche zwar der Anschauung selbstverständlich erscheinen, bei einer exakten Beweisführung jedoch im einzelnen aufgeführt und nachgewiesen werden müssen.

Wie weit lassen sich nun derartige Überlegungen auf einen abstrakten Funktionenraum übertragen? Hier können wir bereits bei dem Begriff des „Abstandes“ oder der „Länge“ nicht mehr von der Anschauung ausgehen; vielmehr müssen wir ausdrücklich angeben, welche Eigenschaften der gewöhnlichen Länge im *Euklidischen* Raum auch die im Funktionenraum definierte „Länge“ haben muß, damit ein Konvergenzbeweis der skizzierten Art überhaupt möglich ist [29, 64, 65].

Wir folgen nun im wesentlichen der Darstellung von *Collatz* ([29], § 5). Danach reicht es für die folgende, keineswegs allgemeinste, aber für unsere Zwecke ausreichende Formulierung des Fixpunktsatzes hin, wenn man den Abstand  $\|f_1 - f_2\|$  zwischen zwei beliebigen Elementen  $f_1$  und  $f_2$  des Funktionenraums so definiert, daß er den folgenden drei Bedingungen genügt:

1. Symmetrie:

$$\|f_1 - f_2\| = \|f_2 - f_1\| \quad (2.2.1)$$

2. Positive Definitheit:

$$\begin{aligned} \|f_1 - f_2\| &> 0 \quad \text{für } f_1 \neq f_2 \\ \|f_1 - f_2\| &= 0 \quad \text{für } f_1 = f_2 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

3. Dreiecksungleichung:

$$\|f_1 - f_2\| \leq \|f_1 - f_3\| + \|f_3 - f_2\| \quad (2.2.3)$$

wobei  $f_3$  wieder ein Element des Funktionenraums ist. Sind Addition und Subtraktion für zwei beliebige Elemente des Funktionenraums definiert, und enthält der Funktionenraum ein Nullelement  $o$ , so kann man mit der Norm

$$\|f\| = \|f - o\| \quad (2.2.4)$$

d. h. dem Abstand vom Nullelement arbeiten. Sie entspricht der Länge des „Ortsvektors“  $f$ . Vollständig oder abgeschlossen heißt ein Funktionenraum dann, wenn in ihm jede Folge von Elementen  $f_1, f_2, \dots$  mit

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\| = 0 \quad (2.2.5)$$

auch ein Grenzelement  $f$  hat, derart daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0 \quad (2.2.6)$$

und  $f$  ebenfalls zum Funktionenraum gehört.

In einem solchen Funktionenraum sei nun ein Operator  $\mathfrak{T}$  definiert, welcher jedem Element  $f$  des Funktionenraums ein Element  $\mathfrak{T}f$  desselben Funktionenraumes in eindeutiger Weise zuordnet. Z. B. kann man sich unter  $f$  eine Kräftebelegung  $[R]$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  nach § 1.2 vorstellen, und unter  $\mathfrak{T}f$  diejenige Kräftebelegung  $[R]'$ , welche daraus hervorgeht durch Bestimmung des von

( $K$ -) aufgenommenen Teils  $[Q]$  von  $[R]$  und Addition der festen Kräftebelegung  $[P]$ , also

$$[R]' = [P] + [Q] \quad (2.2.7)$$

Die Operatorgleichung

$$f = \mathfrak{F}f \quad (2.2.8)$$

führt dann auf

$$[R] = [P] + [Q] \quad (2.2.9)$$

und damit auf (1.2.11). Der Operator  $\mathfrak{F}$  heißt *Lipschitz*-beschränkt im betrachteten Funktionenraum, wenn es eine positive „*Lipschitz*-Konstante“  $K^*$  gibt derart, daß

$$\|\mathfrak{F}f_1 - \mathfrak{F}f_2\| \leq K^* \|f_1 - f_2\| \quad (2.2.10)$$

ist für beliebige Elemente des Funktionenraums.

Nun suchen wir eine Lösung von (2.2.8) anzunähern durch einen Iterationsprozeß, welcher erklärt ist durch

$$f_{n+1} = \mathfrak{F}f_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.2.11)$$

Dies entspricht für den speziellen, durch (2.2.7) definierten Operator  $\mathfrak{F}$  dem Iterationsverfahren von § 1.2 in der aufsummierten Form (1.2.8). Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (2.2.8) sowie die Konvergenz des Iterationsverfahrens (2.2.11) gegen diese Lösung in dem durch (2.2.6) definierten Sinne ist dann nach ([29], 5.3) gesichert, wenn

1.  $\mathfrak{F}f$  eindeutig definiert ist für alle Elemente  $f$  des betrachteten Funktionenraums, (2.2.12)

2. der Funktionenraum vollständig ist in dem durch (2.2.5–6) erklärten Sinne, (2.2.13)

3. der Operator  $\mathfrak{F}$  nach (2.2.10) *Lipschitz*-beschränkt ist mit  $K^* < 1$ , (2.2.14)

4. gewährleistet ist, daß — bildlich gesprochen — der Vektorzug von Abb. 2.1.1 nicht aus dem Funktionenraum heraustreten kann. Hierfür ist die Bedingung hinreichend, daß alle Elemente  $h$ , die der Bedingung

$$\|h - f_1\| \leq \frac{K^*}{1 - K^*} \|f_1 - f_0\| \quad (2.2.15)$$

genügen, zum Funktionenraum gehören. D. h. in bildlicher Ausdrucksweise, daß die Hyperkugel um  $f_1$  mit dem Radius

$$r = \frac{K^*}{1 - K^*} \|f_1 - f_0\| \quad (2.2.16)$$

ganz im Funktionenraum enthalten ist. Ein Maß für den Fehler der Näherung  $f_1$  erhält man aus dem Abstand zwischen  $f_1$  und der exakten Lösung  $f$  von (2.2.8), der sich durch Einsetzen von  $f$  für  $h$  in (2.2.15) abschätzen läßt:

$$\|f - f_1\| \leq \frac{K^*}{1 - K^*} \|f_1 - f_0\|. \quad (2.2.17)$$

Selbstverständlich kann man für  $f_0$  und  $f_1$  auch ein beliebiges  $f_n$  und  $f_{n+1}$

aus der Folge (2.2.11) einsetzen; der Differenz  $f_{n+1} - f_n$  entspricht im speziellen Fall des Iterationsverfahrens von § 1.2 das Reihenglied

$$R^{n+1} = [R]^{n+1} - [R]^n \quad (2.2.18)$$

Um nun die Konvergenz dieses Iterationsverfahrens nachzuweisen, haben wir zunächst einen Funktionenraum zu finden, dessen Abstandsbegriff so erklärt ist, daß er die Postulate (2.2.1–3) erfüllt, und sodann nachzuweisen, daß der durch (2.2.7) definierte Operator in diesem Funktionenraum den Bedingungen (2.2.12–15) genügt. Nun gilt der Fixpunktsatz in der hier angeführten Form für einen beliebigen vollständigen metrischen Raum [72], also z. B. auch für einen beliebigen *Banach*-Raum. Wir haben hier aus der Geometrie des gewöhnlichen *Euklidischen* Raumes nichts weiter übernommen als die Meßbarkeit des Abstandes zwischen zwei Punkten durch eine positive Zahl und den Satz, daß zwei Seiten eines Dreiecks zusammen stets länger sind als die dritte (2.2.1–3). Es wird sich aber zeigen, daß wir die Iterationsverfahren von § 1 bereits in einem wesentlich spezielleren Funktionenraum beschreiben können, nämlich in einem *Hilbert*-Raum, einem Funktionenraum, der sich vom gewöhnlichen *Euklidischen* Raum im wesentlichen nur durch seine unendliche Dimensionenzahl unterscheidet und der somit die Analogie mit der elementaren Geometrie noch wesentlich weiter zu treiben gestattet. Wir werden uns daher in der nächsten Ziffer mit einigen besonderen Eigenschaften des *Hilbert*-Raums und seiner Operatoren beschäftigen. Zu dem Konvergenzbegriff (2.2.6) sei noch bemerkt, daß er nicht notwendig die gewöhnliche, gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge in sich schließt. Diese Frage muß für jeden Funktionenraum und seine Elemente besonders untersucht werden.

### 2.3 Der reelle *Hilbert*-Raum

Da sich elastische Spannungs- und Dehnungsfelder stets durch reelle Funktionen darstellen lassen, schränken wir unseren Funktionenraum mit *Prager* und *Synge* ([33–35]; [33], Introduction) sowie *Kantorowitsch* ([64], III. § 1) von vornherein auf reelle Elemente ein; dies ermöglicht eine anschaulichere Darstellung. Für beliebige komplexe *Hilbert*-Räume nachgewiesene Sätze [62, 66, 72] gelten dann natürlich erst recht auch bei Einschränkung auf reelle Elemente.

Unter einem reellen *Hilbert*-Raum verstehen wir dann einen metrischen und, wo nicht ausdrücklich anders bemerkt, vollständigen Raum, in welchem die Addition zweier Elemente sowie ihre Multiplikation mit einem Skalar und ein Nullelement entsprechend den gewöhnlichen Regeln der Vektoralgebra erklärt sind (linearer Raum [62]). Außerdem ist für zwei beliebige Elemente  $f$  und  $g$  wie im gewöhnlichen, dreidimensionalen Vektorraum ein kommutatives, distributives und gegenüber der Multiplikation mit einem Skalar  $\mu$  assoziatives Skalarprodukt  $\{f, g\}$  definiert, also

$$\{f, g\} = \{g, f\} \quad (2.3.1)$$

$$\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\} \quad (2.3.2)$$

$$\{\mu f, g\} = \mu \{f, g\} \quad (2.3.3)$$



und für  $f = g$

$$\{f, f\} > 0 \quad \text{für } f \neq 0 \quad (2.3.4)$$

Einem Einheitsvektor im *Euklidischen* Raum entspricht ein „normiertes“ Element

$$\overset{0}{f} = \frac{f}{\sqrt{\{f, f\}}} \quad (2.3.5)$$

Man zeigt nun leicht, daß  $\{f - g, f - g\}$  zwar den Postulaten (2.2.1–2) genügt, nicht aber in jedem Falle der Dreiecksungleichung (2.2.3). Denn in dem Ausdruck

$$\{f - g, f - g\} = \{f, f\} + \{g, g\} - 2\{f, g\} \quad (2.3.6)$$

kann das letzte Glied positiv oder negativ werden. Ist

$$\{f, g\} = 0 \quad (2.3.7)$$

so nennt man die beiden Elemente  $f$  und  $g$  orthogonal, und (2.3.6) geht über in den Satz von *Pythagoras* für ein rechtwinkliges Vektordreieck mit den vom Scheitel des rechten Winkels abgetragenen Katheten  $f$  und  $g$ .

Nun entspricht (2.3.4) keineswegs der Länge im gewöhnlichen *Euklidischen* Raum, sondern vielmehr ihrem Quadrat. Wir prüfen daher die Gültigkeit der Dreiecksungleichung für die Wurzel aus diesem Ausdruck, untersuchen also, ob die Ungleichung

$$\sqrt{\{f - g, f - g\}} \leq \sqrt{\{f, f\}} + \sqrt{\{g, g\}} \quad (2.3.8)$$

für beliebige Elemente des reellen *Hilbert*-Raums zutrifft. Dies ist in der Tat der Fall. Um dies einzusehen, quadrieren wir (2.3.8)

$$\{f, f\} + \{g, g\} - 2\{f, g\} \leq \{f, f\} + \{g, g\} + 2\sqrt{\{f, f\}\{g, g\}} \quad (2.3.9)$$

und erhalten nach Streichung aller überflüssigen Glieder sowie erneutem Quadrieren die *Schwarzsche* Ungleichung

$$\{f, g\}^2 \leq \{f, f\} \{g, g\} \quad (2.3.10)$$

Sie bedeutet in bildlicher Ausdrucksweise, daß der Cosinus des Winkels zwischen zwei Elementen  $f$  und  $g$  dem Betrag nach höchstens gleich Eins sein kann, also

$$\cos^2(f, g) \equiv \frac{\{f, g\}^2}{\{f, f\} \{g, g\}} \leq 1. \quad (2.3.11)$$

Umgekehrt folgt auch (2.3.8) aus (2.3.11); *Schwarzsche* Ungleichung und Dreiecksungleichung sind also im *Hilbert*-Raum äquivalent. Sie gelten auch, wenn man  $f$  und  $g$  durch  $f - h$  und  $g - h$  ersetzt.

Wir haben (2.3.11) noch zu beweisen. Offensichtlich ist nach (2.3.3)

$$\cos^2(f, \mu g) = \cos^2(f, g) \quad (2.3.12)$$

Für  $f = \mu g$  steht also in (2.3.10–11) das Gleichheitszeichen. Für  $f \neq \mu g$ ,

$f, g \neq 0$  konstruieren wir ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten  $\mu g$ ,  $f - \mu g$  und der Hypotenuse  $f$ , indem wir  $\mu \neq 0$  so bestimmen, daß

$$\{f - \mu g, \mu g\} = \mu (\{f, g\} - \mu^2 \{g, g\}) = 0 \quad (2.3.13)$$

wird, was stets möglich ist. Dann ist nach (2.3.3) und (2.3.11)

$$\cos^2(f, \mu g) = \cos^2(f, g) = \frac{\mu^2 \{g, g\}}{\{f, f\}} \quad (2.3.14)$$

Andererseits gilt wegen (2.3.13) der Satz von *Pythagoras*

$$\mu^2 \{g, g\} = \{f, f\} - \{f - \mu g, f - \mu g\} \leq \{f, f\} \quad (2.3.15)$$

woraus mit (2.3.14) die Ungleichung (2.3.11) folgt. Das Gleichheitszeichen kann somit auch nur für  $f = \mu g$  stehen. Sinngemäß wählt man also für die Norm (2.2.4) im *Hilbert*-Raum die Wurzel aus (2.3.4)

$$\|f\| = \sqrt{\{f, f\}} \quad (2.3.16)$$

und hat damit die Erfüllung von (2.2.1–3) gesichert.

Als einen linearen Unterraum des reellen *Hilbert*-Raums mit den Elementen  $f_1, f_2, \dots, f_n$  als Basis bezeichnen wir die Gesamtheit aller Elemente  $f$ , welche sich durch die Linearkombination

$$f = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_n f_n \quad (2.3.17)$$

mit beliebigen reellen Zahlen  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  darstellen lassen; für  $n = 1$  etwa entspricht dieser Unterraum einer Geraden, für  $n = 2$ ,  $\cos(f_1, f_2) < 1$  einer *Euklidischen* Ebene usw. Allgemein entsprechen die Elemente  $f_1, f_2, \dots, f_n$  einem  $n$ -Bein von Vektoren, welche einen *Euklidischen* Unterraum von höchstens  $n$  Dimensionen oder, falls sie untereinander linear unabhängig sind, von genau  $n$  Dimensionen aufspannen. Es läßt sich zeigen, daß „die gesamte *Euklidische* Geometrie gültig ist in jedem linearen Unterraum ... (eines reellen *Hilbert*-Raums) mit einer endlichen Zahl von Vektoren als Basis“ ([34], S. 245). Freilich trifft dies auch nur für endlich-dimensionale Unterräume vom Typ (2.3.17) ohne jede Einschränkung zu; bei Aussagen über den ganzen *Hilbert*-Raum hat man gewisse Modifikationen zu beachten, die sich aus seiner unendlichen Zahl von Dimensionen ergeben. Einer solchen Einschränkung werden wir bei der Spektralzerlegung symmetrischer Operatoren begegnen. Auch kann ein vollständiger *Hilbert*-Raum beliebig viele unendlich-dimensionale Unterräume haben, die ihrerseits wieder vollständige *Hilbert*-Räume sind. Als Beispiel betrachten wir etwa den vollständigen *Hilbert*-Raum aller mit der Periodenlänge  $l$  periodischen Funktionen  $f(x)$  mit dem als beschränkt vorausgesetzten Normquadrat

$$\{f, f\} = \int_0^l f^2(x) dx \quad (2.3.18)$$

Zu diesem *Hilbert*-Raum gehören aber auch alle Funktionen mit den Periodenlängen  $\frac{l}{2}, \frac{l}{3}, \frac{l}{4}, \dots$ ; und zu jeder dieser Periodenlängen gehört wiederum ein vollständiger *Hilbert*-Raum. Einen vollständigen *Hilbert*-Raum mit der Norm

(2.3.18) bildet auch der „Durchschnitt“ (d. h. die Gesamtheit der gemeinsamen Elemente) der Mengen aller Funktionen mit den Periodenlängen  $\frac{l}{2}$  und  $\frac{l}{3}$ .

Andere Beispiele solcher Unterräume werden wir kennenlernen, wenn wir die Gesamtheit aller Spannungs- und Dehnungsfehler in einem elastischen Körper nach verschiedenen Gesichtspunkten einschränken.

Wichtig ist noch die Bemerkung, daß man einen unvollständigen, d. h. nicht den Bedingungen (2.2.5–6) genügenden *Hilbert*-Raum „abschließen“, d. h. vollständig machen kann, indem man neue Elemente definiert mit Hilfe der Folgen, die zwar (2.2.5) erfüllen, aber im ursprünglichen *Hilbert*-Raum noch kein Grenzelement (2.2.6) haben. Durch Hinzufügen aller dieser neuen Elemente wird der ursprüngliche *Hilbert*-Raum zu einem vollständigen *Hilbert*-Raum ergänzt in ähnlicher Weise, wie die Menge aller rationalen Zahlen mit Hilfe der durch den *Dedekindschen* Schnitt definierten Folgen zur abgeschlossenen Menge aller reellen Zahlen vervollständigt wird ([62], S. 5). Auch die Rechnung mit diesen neuen Elementen, den „Limespunkten“, wird in ähnlicher Weise wie bei den irrationalen Zahlen durch konvergente Folgen erklärt ([62], S. 6). Praktisch ist übrigens in den meisten hier behandelten Fällen die Vollständigkeit des Funktionenraumes evident.

Wichtig ist schließlich noch der folgende Satz: Gilt

$$\{g, f_1\} = \{g, f_2\} \quad (2.3.19)$$

für alle Elemente  $g$  des reellen *Hilbert*-Raumes und zwei feste Elemente  $f_1$  und  $f_2$ , so folgt daraus

$$f_1 = f_2 \quad (2.3.20)$$

in dem Sinne, daß

$$\|f_1 - f_2\| = 0 \quad (2.3.21)$$

Zum Beweis hat man nur (2.3.19) umzuschreiben

$$\{g, f_1 - f_2\} = 0 \quad (2.3.22)$$

und

$$g = \mu (f_1 - f_2) \quad \mu \neq 0 \quad (2.3.23)$$

zu setzen; es würde sich daraus ein Widerspruch ergeben, wenn (2.3.21) nicht erfüllt ist. Die Einschränkung (2.3.21) ist meist von geringer praktischer Bedeutung; in Funktionenräumen genügen gewisse zusätzliche Stetigkeitsforderungen, damit (2.3.20) aus (2.3.21) folgt [73]. Schlimmstenfalls ist (2.3.20) auf einer „Punktmenge vom Maß Null“ im physikalischen Raum verletzt; dies kann etwa Erscheinungen von der Art des *Gibbs'schen* Phänomens [73] an meist leicht erkennbaren Ausnahmestellen bedeuten. (2.3.19) gestattet auch eine einfache physikalische Deutung, wenn man etwa  $f_1, f_2$  als zwei feste räumliche Kräftebelegungen und die Menge aller  $g$  als die Gesamtheit aller im *Euklidischen* Raum denkbaren ortsabhängigen Verschiebungsfelder interpretiert. Dann stellen die beiden Seiten von (2.3.19) die Arbeit dar, welche die Kräftebelegungen  $f_1$  bzw.  $f_2$  an den Verschiebungsfeldern  $g$  leisten. Daß nun zwei Kräftebelegungen identisch sein müssen, die mit allen möglichen Verschiebungsfeldern dieselbe Arbeit leisten, ist physikalisch durchaus einleuchtend.

Gehören die Elemente  $g$  einerseits und  $f_1, f_2$  andererseits verschiedenen *Hilbert*-Räumen an, so ist der Schluß von (2.3.19) auf (2.3.20) nur noch dann erlaubt, wenn der *Hilbert*-Raum von  $f_1$  und  $f_2$  ganz im *Hilbert*-Raum aller  $g$  enthalten ist, da anders (2.3.23) nicht mehr in allen Fällen erfüllbar ist. Stellt man sich z. B. unter den festen Elementen  $f_1, f_2$  dreidimensionale Kräftebelegungen vor, während man die Verschiebungsfelder  $g$  auf Verschiebungen parallel zu einer Ebene einschränkt, so ist der Schluß von der gleichen Arbeit mit sämtlichen Verschiebungsfeldern auf die Gleichheit der Kräftebelegungen ersichtlich nicht mehr möglich. Dagegen bleibt er in vollem Umfange gültig, wenn man zwar die Kräftebelegungen  $f_1, f_2$  auf Systeme zu einer Ebene paralleler Kräfte beschränkt, andererseits aber noch beliebige dreidimensionale Verschiebungsfelder  $g$  zuläßt.

Die Konvergenz einer Funktionenfolge im Sinne von (2.2.6) wird im reellen *Hilbert*-Raum als „Konvergenz im Mittel“ oder auch „starke Konvergenz“ bezeichnet [62–64, 66, 73]. Wie weit aus der Konvergenz im Mittel die gewöhnliche, gleichmäßige Konvergenz abgeleitet werden kann, ergibt sich sinngemäß aus den Bemerkungen im Anschluß an (2.2.23) und den dort angeführten, ausführlichen Überlegungen bei *Courant* und *Hilbert* [73].

#### 2.4 Symmetrische Operatoren im reellen *Hilbert*-Raum

Unter einem Operator  $\mathfrak{B}$  in einem Funktionenraum verstehen wir wie unter Ziff. 2.2 eine Vorschrift, durch welche jedem Element  $f$  des Funktionenraums ein Element

$$g = \mathfrak{B}f \quad (2.4.1)$$

desselben Funktionenraums eindeutig zugeordnet wird [62–67]. Mit anderen Worten: (2.4.1) bestimmt eine Transformation des Funktionenraums oder vermittelt eine Abbildung des Funktionenraums auf sich selbst bzw. einen seiner Unterräume. Die Transformation (2.4.1) heißt linear, wenn sie additiv und homogen ist, d. h. für zwei beliebige Elemente  $f_1$  und  $f_2$

$$\mathfrak{B}(f_1 + f_2) = \mathfrak{B}f_1 + \mathfrak{B}f_2 \quad (2.4.2)$$

sowie für eine beliebige Konstante  $\mu$

$$\mathfrak{B}(\mu f) = \mu \mathfrak{B}f \quad (2.4.3)$$

gilt. Sie heißt ferner beschränkt, wenn es eine positive Zahl  $M^*$  derart gibt, daß für jedes beliebige  $f$  des betrachteten Funktionenraums

$$\|\mathfrak{B}f\| \leq M^* \|f\| \quad (2.4.4)$$

gilt. Die kleinste dieser Zahlen  $M$  heißt die Norm des Operators  $\mathfrak{B}$  und wird mit  $\|\mathfrak{B}\|$  bezeichnet:

$$\|\mathfrak{B}\| = M \quad (2.4.5)$$

([62], § 2; [64, 66]). Die Norm eines Operators stellt also begrifflich etwas völlig anderes dar als die Norm eines Elements. Insbesondere entsprechen den linearen Operatoren in einem reellen *Hilbert*-Raum die Tensoren 2. Stufe im *Euklidischen* Raum, und der Transformation (2.4.1) die skalare Multiplikation

mit einem Vektor. In der Matrizenrechnung [68–70] entsprechen den linearen Operatoren quadratische Matrizen und den Elementen die Spaltenvektoren; ist eine Matrix symmetrisch, so entspricht der Operatornorm ihr größter Eigenwertbetrag.

Stellen wir uns unter den Elementen  $f$  des Funktionenraumes die Kräftebelegungen  $[R]$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  nach § 1.2 vor, so ist der Operator  $\mathfrak{Z}$ , welcher der Kräftebelegung  $[R]$  nach (2.2.7) die Kräftebelegung  $[R]'$  zuordnet, gewiß weder additiv noch homogen; dies ist bedingt durch die in der Zuordnungsvorschrift enthaltene Addition des festen Elements  $[P]$ . Additiv und homogen nach (2.4.2–3), also linear ist dagegen derjenige Operator  $\mathfrak{B}$ , welcher zu der Kräftebelegung  $[R]$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  denjenigen Teil  $[Q]$  bestimmt, der vom Außengebiet  $(K^-)$  aufgenommen wird. Identifizieren wir mit dem Element  $g$  die Kräftebelegung  $[R]'$  aus (2.2.7), mit dem Element  $f$  die Kräftebelegung  $[R]$  und mit dem festen Element  $b$  die fest vorgegebene Kräftebelegung  $[P]$ , so erscheint (2.2.7) in der Form

$$g = b + \mathfrak{Z}f \quad (2.4.6)$$

und unter Verwendung des Einheitsoperators  $\mathfrak{E}$  („identische Transformation“) wird aus der Operatorgleichung (2.2.8)

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{Z})f = b \quad (2.4.7)$$

wobei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E} - \mathfrak{Z} \quad (2.4.8)$$

wiederum ein linearer Operator ist. Im nächsten Paragraphen werden wir dann einen reellen *Hilbert*-Raum bestimmen, in dem der zum Iterationsverfahren von § 1.2 gehörige Operator  $\mathfrak{B}$  auch beschränkt ist.

Zunächst definieren wir für einen beliebigen linearen und beschränkten Operator  $\mathfrak{B}$  in einem reellen *Hilbert*-Raum die zu (2.4.1) adjungierte Transformation, die wir durch Anwendung des Operators  $\mathfrak{B}$  von rechts symbolisieren

$$g = f\mathfrak{B} \quad (2.4.9)$$

Die adjungierte Transformation ist bestimmt durch die Forderung, daß

$$\{f\mathfrak{B}, h\} = \{f, \mathfrak{B}h\} \quad (2.4.10)$$

ist für ein beliebiges festes  $f$  und sämtliche Elemente  $h$  des reellen *Hilbert*-Raums. Die rechte Seite dieser Gleichung ist für jedes  $h$  gemäß (2.4.1) erklärt; damit ist aber auch nach (2.3.19–21) das feste Element  $f\mathfrak{B}$  auf der linken Seite eindeutig bestimmt, falls es überhaupt eines gibt, das (2.4.10) für alle  $h$  des betrachteten *Hilbert*-Raums erfüllt. Die Existenz eines solchen Elements läßt sich jedoch, was wir hier nicht durchführen wollen, aus einem Satz über lineare Funktionale ableiten ([66], Ziff. 30, 84). Weiter gilt für die Norm der adjungierten Transformation

$$\|\mathfrak{B}^*\| = \limsup \frac{\|f\mathfrak{B}\|}{\|f\|} = \limsup \frac{\|\mathfrak{B}f\|}{\|f\|} = \|\mathfrak{B}\| \quad (2.4.11)$$

([62], S. 10, [66], Ziff. 84); man kann also von der Norm des Operators  $\mathfrak{B}$

schlechthin sprechen, gleichgültig ob er von links oder von rechts angewendet wird. Ein Operator  $\mathfrak{B}$  heißt selbstadjungiert, wenn

$$f\mathfrak{B} = \mathfrak{B}f \quad (2.4.12)$$

für alle  $f$  des reellen *Hilbert*-Raums gilt; ist er gleichzeitig beschränkt, so wird er auch als symmetrisch bezeichnet. Ein Analogon in endlich-dimensionalen Räumen bilden die symmetrischen Tensoren 2. Stufe und die symmetrischen Matrizen.

Wir sind hier bei der Definition der adjungierten Transformation von der in der Literatur [62, 64, 66, 67] üblichen Schreibweise durch Einführung der Anwendung eines Operators von rechts in (2.4.9) abgewichen. Gewöhnlich wird ein adjungierter Operator  $\mathfrak{B}^*$  definiert, welcher ebenso wie der ursprüngliche Operator  $\mathfrak{B}$  von links angewendet wird, derart, daß

$$\mathfrak{B}^* f \equiv f\mathfrak{B} \quad (2.4.13)$$

Die Schreibweise (2.4.9) hat jedoch einige Vorzüge für Operatoren, bei denen sich die adjungierte Transformation auf physikalisch andersartige Größen bezieht. Wirkt z. B. die ursprüngliche Transformation (2.4.1) auf die Kräftebelegung  $[R]$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$ , so muß, wie im übernächsten Paragraphen gezeigt wird, die adjungierte Transformation (2.4.9) auf die zugehörige Verschiebung von  $(S)$  in  $K^\circ$  angewandt werden. Es trägt aber zweifellos zur Übersichtlichkeit bei, wenn auf derselben Seite des Operators stets physikalisch gleichartige Größen erscheinen.

Wir beschäftigen uns nun mit symmetrischen Operatoren nach (2.4.12). Von den symmetrischen Tensoren 2. Stufe im *Euklidischen* Raum ist bekannt, daß sie ein ausgezeichnetes System von drei aufeinander senkrechten Hauptachsen besitzen, in denen sie jeweils eine reine Streckung oder Stauchung vermitteln [1, 2]. Entsprechendes gilt in der Matrizenrechnung. Eine  $N$ -reihige quadratische und symmetrische Matrix besitzt stets  $N$  reelle Eigenwerte, die teilweise oder auch insgesamt untereinander gleich sein können. Zu diesen  $N$  Eigenwerten gehören insgesamt  $N$  verschiedene, im Sinne von (2.3.7) orthogonale Eigenvektoren. Sind mehrere Eigenwerte gleich, so können innerhalb des Unterraums der zugehörigen Eigenvektoren durch Linearkombination (2.3.17), wo  $n \leq N$  die Zahl der gleichen Eigenwerte ist, mit Hilfe eines *Gram-Schmidt*schen Orthogonalisierungsprozesses neue Eigenvektoren gebildet werden. Geometrisch entsprechen die Eigenvektoren den Hauptachsenrichtungen eines  $N$ -dimensionalen Kegelschnitts und die Eigenwerte dem reziproken Quadrat seiner Halbachsen; daß sie in einem Unterraum mit gleichen Eigenwerten teilweise willkürlich wählbar sind, entspricht der bekannten elementar-geometrischen Tatsache, daß man im Kreis bzw. in der Kugel zwei bzw. drei aufeinander senkrechte Achsen beliebig legen kann. Das System der  $N$  Eigenvektoren ist vollständig in dem Sinne, daß sich jeder Vektor des  $N$ -dimensionalen Raumes durch Linearkombination der  $N$  Eigenvektoren darstellen läßt [68–70].

Die Analogie zu den symmetrischen Matrizen legt nun für einen symmetrischen Operator  $\mathfrak{B}$  die Vermutung nahe, daß er — im allgemeinen unendlich viele —

reelle Eigenwerte  $\mu_i$  und zugehörige Eigenelemente  $f^{(i)}$  besitzen wird, welche jeweils die Gleichung

$$\mathfrak{B} f = \mu_i f^{(i)} \quad (2.4.14)$$

erfüllen. Existiert ein solches Eigenelement  $f^{(i)}$ , so heißt

$$f^{(i)} = \frac{f}{\sqrt{\{f^{(i)}, f^{(i)}\}}} \quad (2.4.15)$$

das zugehörige normierte Eigenelement. Zwischen verschiedenen Eigenelementen gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\left\{ \begin{matrix} <i> \\ f \end{matrix}, \begin{matrix} <j> \\ f \end{matrix} \right\} = 0 \quad i \neq j \quad (2.4.16)$$

Für  $\mu_i \neq \mu_j$  wird dies nachgewiesen, indem man von den Gleichungen

$$\mathfrak{B} f = \mu_i f^{(i)} \quad (2.4.17)$$

$$\mathfrak{B} f = \mu_j f^{(j)}$$

die erste skalar mit dem Element  $f^{(j)}$ , die zweite mit dem Element  $f^{(i)}$  multipliziert und subtrahiert; wegen der Symmetrie von  $\mathfrak{B}$  folgt dann

$$(\mu_i - \mu_j) \left\{ \begin{matrix} <i> \\ f \end{matrix}, \begin{matrix} <j> \\ f \end{matrix} \right\} = 0 \quad (2.4.18)$$

und damit (2.4.16).

Falls mehrere, endlich oder abzählbar unendlich viele Eigenwerte  $\mu_k$  mit verschiedenen, untereinander linear unabhängigen Eigenelementen  $f^{(k)}$  gleich sind, läßt sich (2.4.16) stets auf unendlich viele Weisen durch einen *Gram-Schmidt*-schen Orthogonalisierungsprozeß erzwingen ([40], S. 21; [66], Ziff. 33; [73], S. 50).

Das Orthogonalsystem der Eigenelemente heißt vollständig, wenn die Summenfolge

$$f_n = \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{matrix} <i> \\ f \end{matrix}, \begin{matrix} <i> \\ f \end{matrix} \right\} \quad (2.4.19)$$

für jedes beliebige Element  $f$  des betrachteten *Hilbert*-Raumes in dem durch (2.2.6) definierten Sinne gegen  $f$  konvergiert. Dann gilt

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} <i> \\ f \end{matrix}, \begin{matrix} <i> \\ f \end{matrix} \right\} \quad (2.4.20)$$

was für die Elemente eines Funktionenraumes, also die Funktionen  $f$ , im Sinne der Konvergenz im Mittel zu verstehen ist (§ 2.3, Schluß). Der Operator  $\mathfrak{B}$

läßt sich dann mit Hilfe der „dyadischen Produkte“  $f^{<i>} f^{<i>}$  seiner normierten Eigenelemente mit sich selbst in der symbolischen Form

$$\mathfrak{B} \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i f^{<i>} f^{<i>} \quad (2.4.21)$$

anschreiben; im Funktionenraum ist das dyadische Produkt derart definiert, daß die beiden Faktorfunktionen von verschiedenen, voneinander unabhängigen Veränderlichen des physikalischen Raumes abhängen, also z. B. bei Funktionen einer reellen Variablen durch

$$f^{<i>} f^{<i>} \triangleq f(x) f(y) \quad (2.4.22)$$

mit den unabhängigen Veränderlichen  $x, y$ . Die Anwendung (2.4.21) auf ein beliebiges Element  $f$  ist erklärt durch die für beschränkte  $|\mu_i|$  im Sinne von (2.2.6) konvergente Entwicklung

$$\mathfrak{B} f = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i f^{<i>} \{ f^{<i>}, f \} \quad (2.4.23)$$

und die Norm (2.4.5) von  $\mathfrak{B}$  ist demnach

$$\|\mathfrak{B}\| = \limsup |\mu_i| \quad (2.4.24)$$

Durch wiederholte Anwendung des Operators  $\mathfrak{B}$  auf beliebige feste Elemente  $f$  lassen sich Potenzen  $\mathfrak{B}^n$  des Operators  $\mathfrak{B}$  und durch Addition verschiedener Potenzen Polynome  $p(\mathfrak{B})$  in  $\mathfrak{B}$  erklären. Für ein solches Operatorpolynom erhält man die (2.4.21) entsprechende Entwicklung

$$p(\mathfrak{B}) \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} p(\mu_i) f^{<i>} f^{<i>} \quad (2.4.25)$$

oder bei Anwendung auf ein beliebiges Element  $f$  entsprechend (2.4.23)

$$p(\mathfrak{B}) f = \sum_{i=1}^{\infty} p(\mu_i) f^{<i>} \{ f^{<i>}, f \} \quad (2.4.26)$$

Die Reihenentwicklungen auf der rechten Seite von (2.4.21) und (2.4.25) werden nach Einsetzen von (2.4.22) im allgemeinen dem Zahlenwert nach nicht konvergieren; dies ist jedoch auch nicht notwendig; es genügt, wenn (2.4.23) und (2.4.26) für jedes  $f$  einen Sinn haben [62, 64, 66, 67].

Von einem symmetrischen Operator  $\mathfrak{B}$ , der (2.4.14–26) erfüllt, sagt man, er habe ein reines Punktspektrum ([66], Ziff. 132). Soll das Orthogonalsystem der Eigenfunktionen vollständig sein, so muß das Spektrum der Eigenwerte wenigstens einen Häufungspunkt haben; seine Häufungspunkte können aber auch beliebig dicht auf einem endlichen Abschnitt der reellen Achse liegen. Operatoren mit reinem Punktspektrum kommen den aus endlich-dimensionalen Euklidischen Räumen bekannten Verhältnissen am nächsten.

Tatsächlich braucht aber ein symmetrischer Operator in einem Hilbert-Raum keineswegs ein reines Punktspektrum zu besitzen; dies ist bisher im wesent-



lichen nur für „vollstetige“ Operatoren nachgewiesen und für Operatoren, die sich als Summe des mit einer Konstanten multiplizierten Einheitsoperators und eines vollstetigen Operators anschreiben lassen. Zu den vollstetigen Operatoren gehören insbesondere die Integraloperatoren mit beschränktem, unwesentlich singulärem oder quadratisch integreablem Kern [40, 41, 62–64, 66, 67, 73]. Das Spektrum eines vollstetigen Operators ist dadurch gekennzeichnet, daß es nur den einzigen Häufungspunkt Null hat. Für nicht vollstetige Operatoren ist der Nachweis eines reinen Punktspektrums bisher nur in Ausnahmefällen geführt worden [74, 75]. Die im folgenden Paragraphen eingeführten Operatoren können jedoch nicht vollstetig sein, da sie im selben *Hilbert*-Raum eine beschränkte Inverse  $\mathfrak{B}^{-1}$  besitzen müssen, welche bestimmt ist durch

$$\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{B} f = \mathfrak{B} \mathfrak{B}^{-1} f = f \quad (2.4.27)$$

für alle  $f$  des *Hilbert*-Raums.

Die (2.4.25) entsprechende symbolische Entwicklung der Inversen  $\mathfrak{B}^{-1}$  im Falle eines reinen Punktspektrums ist nun

$$\mathfrak{B}^{-1} \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} \overset{<i>}{f} \overset{<i>}{f} \quad (2.4.28)$$

Diese hat aber offensichtlich nur dann einen Sinn für alle  $f$ , wenn eine endliche Umgebung von Null auf der reellen Achse von Eigenwerten  $\mu_i$  des Operators  $\mathfrak{B}$  frei ist.

Wir müssen also den allgemeinen Fall eines beschränkten symmetrischen Operators betrachten. Hier bleibt von den aus der Matrizenrechnung bekannten Existenzsätzen nur noch die eine Aussage übrig, daß das Spektrum reell ist. Eine allgemeine Formulierung erhält man mit Hilfe der „Spektralfunktion“  $\epsilon_{\mu}$ , eines von dem reellen und stetigen Parameter  $\mu$  abhängigen Projektionsoperators. Unter einem Projektionsoperator versteht man einen Operator, welcher nichts weiter bewirkt als die Projektion eines Elementes  $f$  auf einen Unterraum des *Hilbert*-Raumes in ähnlicher Weise, wie im dreidimensionalen *Euklidischen* Raum ein beliebiger Vektor auf eine Ebene projiziert wird ([62], S. 12, [66], Ziff. 105). In diesem Sinne ist z. B.

$$\epsilon_{\mu_n} \triangleq \sum_{i=1}^n \overset{<i>}{f} \overset{<i>}{f} \quad (2.4.29)$$

mit der durch (2.4.19) definierten Anwendung

$$\epsilon_{\mu_n} f = \sum_{i=1}^n \overset{<i>}{f} \left\{ \overset{<i>}{f}, f \right\} \quad (2.4.30)$$

ein Projektionsoperator, welcher das beliebige Element auf den von den Eigen-  
 $\overset{<1>}{f}, \overset{<2>}{f}, \dots, \overset{<n>}{f}$  aufgespannten linearen Unterraum projiziert. Da ein vollständiger *Hilbert*-Raum auch andere vollständige *Hilbert*-Räume als Unterräume enthalten kann (vgl. etwa (2.3.18)ff.), sind auch Projektionen auf unendlichdimensionale Unterräume denkbar. Projektionsoperatoren sind stets symmetrisch und nicht-negativ definit [62, 66].

Nun sei — zunächst im Falle eines reinen Punktspektrums —  $m$  die untere und  $M$  die obere Grenze des Operatorspektrums, d. h. entweder sein kleinster bzw. größter Eigenwert oder der kleinste bzw. größte Häufungspunkt seiner Eigenwerte. Wir denken uns nun die Eigenelemente in (2.4.29) nach wachsenden Eigenwerten  $\mu_i$  geordnet. Setzen wir dann

$$\begin{aligned}\epsilon_\mu &= 0 & \text{für } \mu < m \\ \epsilon_\mu &= \epsilon_{\mu_i} & \text{für } \mu_i \leq \mu < \mu_{i+1} \\ \epsilon_\mu &= \mathfrak{E} & \text{für } M \leq \mu\end{aligned}\quad (2.4.31)$$

so ist dies bereits die gesuchte Spektralfunktion im Falle eines reinen Punktspektrums. Es ist eine „Treppenfunktion“, d. h. die Dimensionszahl des Bildraums des Projektionsoperators nimmt dort, wo  $\mu$  einen Eigenwert durchläuft, sprunghaft um eine, mehrere oder sogar unendlich viele Dimensionen zu; an allen übrigen Stellen bleibt der Operator konstant. Nunmehr lassen sich die Gleichungen (2.4.20, 23, 26, 28) in die Form bringen ([62], § III.1; [66], Ziff. 107)

$$f = \int_{\mu=m-0}^M d\epsilon_\mu f \quad (2.4.32)$$

$$\mathfrak{B} f = \int_{\mu=m-0}^M \mu d\epsilon_\mu f \quad (2.4.33)$$

$$p(\mathfrak{B}) f = \int_{\mu=m-0}^M p(\mu) d\epsilon_\mu f \quad (2.4.34)$$

$$\mathfrak{B}^{-1} f = \int_{\mu=m-0}^M \frac{1}{\mu} d\epsilon_\mu f \quad (2.4.35)$$

für alle  $f$  des Hilbert-Raums oder auch, wenn man nur den Operator selbst anschreibt, beispielsweise

$$p(\mathfrak{B}) = \int_{\mu=m-0}^M p(\mu) d\epsilon_\mu \quad (2.4.36)$$

Die Integrale sind wegen der Sprungstellen von  $\epsilon_\mu$  im Sinne von *Stieltjes* zu verstehen; die untere Grenze wurde mit  $m - 0$  bezeichnet, da  $\epsilon_\mu$  nach (2.4.31) nur rechtsseitig stetig definiert ist ([66], Ziff. 107). Ein Wert  $\mu$ , für den sich  $\epsilon_\mu$  stetig oder sprunghaft ändert, heißt zum Spektrum von  $\mathfrak{B}$  gehörig; andernfalls sagt man, er gehöre nicht zum Spektrum.

Die Gleichungen (2.4.32–36) stellen zunächst nichts weiter dar als eine neue Schreibweise für einen bekannten Sonderfall, nämlich für einen Operator mit reinem Punktspektrum. Sie gestatten aber auch, den allgemeinen Fall zu erfassen; man braucht dazu nur neben der Sprungfunktion (2.4.31) auch noch stetig mit  $\mu$  veränderliche Spektralfunktionen zuzulassen, eine Besonderheit des unendlich-dimensionalen Hilbert-Raums, die man sich schwerlich durch irgend ein Analogon in endlich-dimensionalen Räumen anschaulich machen kann. Wo die Spektralfunktion  $\epsilon_\mu$  stetig mit  $\mu$  veränderlich ist, spricht man

von einem „Kontinuum“ im Spektrum des Operators  $\mathfrak{B}$  [62, 64, 66]. Läßt man sowohl Sprünge als auch kontinuierliche Veränderlichkeit zu, so kann man zeigen, daß zu jedem symmetrischen Operator eine Spektralfunktion eindeutig bestimmt ist ([62], § III.1; [64]; [66], Ziff. 107).

Welche Eigenschaften hat nun die Spektralfunktion im allgemeinen Falle noch mit der Spektralfunktion (2.4.31) eines Punktspektrums gemeinsam? Zunächst nimmt die Spektralfunktion auch im allgemeinen Fall mit wachsendem  $\mu$  nicht ab, d. h. der Unterraum von  $\epsilon_{\mu'}$  ist für  $\mu'' \geq \mu'$  ganz im Unterraum von  $\epsilon_{\mu'}$  enthalten; entsprechend der Definition der Spektralfunktion als eines veränderlichen Projektionsoperators ist danach

$$\epsilon_{\mu''} \epsilon_{\mu'} = \epsilon_{\mu'} \epsilon_{\mu''} = \epsilon_{\mu'} \quad \text{für} \quad \mu'' \geq \mu' \quad (2.4.37)$$

Die Orthogonalitätseigenschaft der Eigenfunktionen (2.4.16) überträgt sich auf die Spektralfunktion  $\epsilon_{\mu}$  derart, daß ihre zu verschiedenen, sich nicht überschneidenden Abschnitten des Spektrums gehörenden „Werte“, d. h. ihre von  $\mu$  abhängigen Projektionsoperatoren in verschiedenen Abschnitten, orthogonal zueinander sind. Mit anderen Worten: Die Spektralfunktion ist „abschnittsweise orthogonal“. Dies folgt aus (2.4.37) mit

$$(\epsilon_{\mu''} - \epsilon_{\mu'}) \epsilon_{\mu'} = \epsilon_{\mu'} - \epsilon_{\mu'} = 0 \quad \text{für} \quad \mu'' \geq \mu' \quad (2.4.38)$$

Erst recht gilt dies, wie leicht nachzuweisen, für Teilintervalle der Abschnitte  $(m, \mu')$  und  $(\mu', \mu'')$ .

Das Skalarprodukt von (2.4.34) mit einem anderen Element  $g$  erscheint in der Form

$$\{p(\mathfrak{B})f, g\} = \int_{\mu=m-0}^M p(\mu) \{f, d\epsilon_{\mu} g\} \quad (2.4.39)$$

wobei natürlich auch

$$p(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}^0 = \mathfrak{E} \quad (2.4.40)$$

sein kann. Im Falle eines reinen Punktspektrums mit den Eigenfunktionen  $f^{<i>}$  wird aus (2.4.39)

$$\{p(\mathfrak{B})f, g\} = \sum_{i=1}^{\infty} p(\mu_i) \left\{ f^{<i>}, f^{<i>} \right\} \left\{ f^{<i>}, g \right\} \quad (2.4.41)$$

([66], Ziff. 107).

Bemerkenswert ist noch ein Satz von *Weyl*, nach dem die Addition eines vollstetigen Operators zu einem beliebigen Operator  $\mathfrak{B}$  die Häufungspunkte seines Spektrums unverändert läßt ([66], Ziff. 134). Daraus folgt, daß ein Punktspektrum nur dann durch Addition eines vollstetigen Operators in ein Spektrum mit Kontinuum überführt werden kann, wenn wenigstens auf einem endlichen Intervall der reellen Achse jeder Punkt ein Häufungspunkt des Punktspektrums ist, die Eigenwerte in diesem Intervall also dicht liegen.

Die hier entwickelte Spektraltheorie eines symmetrischen Operators läßt sich auf eine wichtige Klasse symmetrisierbarer Operatoren übertragen. Symmetrisierbar durch den Operator  $\mathfrak{S}$  heißt der Operator  $\mathfrak{B}$  in einem reellen Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt  $\{f, g\}$  dann, wenn es einen in diesem Hilbert-

Raum linearen und symmetrischen Operator  $\mathfrak{S}$  derart gibt, daß der Produktoperator  $\mathfrak{S} \mathfrak{B}$  in diesem *Hilbert*-Raum symmetrisch ist, also für jedes beliebige  $f$

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{B} f) \equiv \mathfrak{S} \mathfrak{B} f = f \mathfrak{S} \mathfrak{B} \equiv (f \mathfrak{S}) \mathfrak{B} \quad (2.4.42)$$

gilt [75–77]. Wir werden im folgenden, wo nicht ausdrücklich anders vermerkt, nur solche Fälle betrachten, in denen der Operator  $\mathfrak{S}$  eigentlich positiv definit, d. h. die untere Grenze seines Spektrums positiv ist. Dann ist aber  $\mathfrak{B}$  symmetrisch in einem neuen *Hilbert*-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\{f, g\}^* \equiv \{f, \mathfrak{S} g\} = \{f \mathfrak{S}, g\} \quad (2.4.43)$$

[75]. In der Tat erfüllt (2.4.43) wegen (2.4.1–3, 10, 12) die Forderungen (2.3.1–3). Die Norm eines Elements  $f$  im neuen *Hilbert*-Raum ist

$$\|f\|^* = \sqrt{\{f, \mathfrak{S} f\}} > 0 \quad \text{für } f \neq 0 \quad (2.4.44)$$

Der Begriff der Symmetrie eines Operators  $\mathfrak{B}$  läßt sich in den neuen *Hilbert*-Raum übertragen, wenn man nach den Bemerkungen im Anschluß an (2.4.10) überlegt, daß im alten *Hilbert*-Raum die Gültigkeit der Beziehung

$$\{f, \mathfrak{B} g\} = \{g, \mathfrak{B} f\} \quad (2.4.45)$$

für zwei beliebige  $f$  und  $g$  äquivalent ist mit der Gültigkeit von (2.4.12) für alle  $f$ . Gewöhnlich wird sogar — in der Schreibweise (2.4.13) — (2.4.45) an Stelle von (2.4.12) zur Definition des Symmetriebegriffs benutzt [62, 64, 66, 67].

Wir nennen nun einen Operator  $\mathfrak{B}$  symmetrisch in dem neuen *Hilbert*-Raum mit dem Skalarprodukt (2.4.43), wenn für alle  $f$  und  $g$

$$\{f, \mathfrak{B} g\}^* = \{g, \mathfrak{B} f\}^* \quad (2.4.46)$$

Ein im alten *Hilbert*-Raum mit  $\mathfrak{S}$  symmetrisierbarer Operator erfüllt aber nach (2.4.42) und (2.4.10) im neuen *Hilbert*-Raum die Symmetriebedingung (2.4.46), denn es ist

$$\begin{aligned} \{f, \mathfrak{B} g\}^* &\equiv \{f, \mathfrak{S} \mathfrak{B} g\} = \{f, g \mathfrak{S} \mathfrak{B}\} = \{g \mathfrak{S} \mathfrak{B}, f\} = \\ &= \{g, \mathfrak{S} \mathfrak{B} f\} \equiv \{g, \mathfrak{B} f\}^* \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

(2.4.46) genügt aber, um die im alten *Hilbert*-Raum entwickelte Spektraltheorie auf den neuen *Hilbert*-Raum zu übertragen. Die Spektralfunktion  $\epsilon_\mu$  ist dann im alten *Hilbert*-Raum freilich nicht mehr symmetrisch, sondern nur noch wie  $\mathfrak{B}$  selbst mit  $\mathfrak{S}$  symmetrisierbar, und im Falle eines reinen Punktspektrums tritt an die Stelle des gewöhnlichen Orthogonalsystems der Eigen-elemente  $\overset{<i>}{f}$  in (2.4.14) ein „Biorthogonalsystem“ ([40], S. 281, S. 439; [66], Ziff. 86) der „rechtsseitigen Eigen-elemente“  $\overset{<i>}{f}$  und der „linksseitigen Eigen-elemente“  $\overset{<i>}{\mathfrak{S} f}$ . Ein normiertes, rechtsseitiges Eigen-element ist jetzt erklärt durch

$$\overset{<i>}{f} = \frac{\overset{(i)}{f}}{\sqrt{\{f^{(i)}, f^{(i)}\}^*}} \quad (2.4.48)$$

an Stelle von (2.4.15).

Wir haben bisher mit (2.4.42) nur die „linksseitige Symmetrisierbarkeit“ betrachtet; sinngemäß werden wir einen Operator  $\mathfrak{B}$  als „rechtsseitig symmetrisierbar durch den Operator  $\mathfrak{G}$ “ bezeichnen, wenn es im ursprünglichen *Hilbert*-Raum einen linearen, symmetrischen und, wo nicht ausdrücklich anders vermerkt, eigentlich positiv definiten Operator  $\mathfrak{G}$  gibt derart, daß der Produktoperator  $\mathfrak{B}\mathfrak{G}$  im ursprünglichen *Hilbert*-Raum symmetrisch ist. Rechtsseitig symmetrisierbare Operatoren lassen sich — unter Vertauschung von Links- und Rechtsoperationen — genau so behandeln wie linksseitig symmetrisierbare. Auf weitere Einzelheiten werden wir später in den Anwendungen eingehen.

## 2.5 Einige Sätze über symmetrische Operatoren

**Satz 1:** Es sei  $\mathfrak{B}$  ein linearer und symmetrischer Operator in einem reellen *Hilbert*-Raum,  $m$  und  $M$  seien die untere und die obere Grenze seines Spektrums. Dann gilt:

$$a) \quad \left\| \mathfrak{B}f - \frac{M+m}{2}f \right\| \leq \frac{M-m}{2} \|f\| \quad (2.5.1)$$

Gibt es außerdem zwei reelle Zahlen  $\mu'$  und  $\mu''$  derart, daß  $m \leq \mu' < \mu'' \leq M$  und kein Punkt des offenen Intervalls  $\mu' < \mu < \mu''$  zum Spektrum gehört (d. h., daß die Spektralfunktion  $\epsilon_\mu$  in diesem offenen Intervall konstant ist, sich also weder stetig noch sprunghaft ändert), so gilt weiter

$$b) \quad \left\| \mathfrak{B}f - \frac{\mu'' + \mu'}{2}f \right\| \geq \frac{\mu'' - \mu'}{2} \|f\| \quad (2.5.2)$$

Dieser Satz erlaubt eine bildliche Formulierung: Denkt man sich die Elemente  $f$ ,  $\mathfrak{B}f$  usw. als Ortsvektoren von einem gemeinsamen Ursprung aus abgetragen, so liegt einerseits nach a) der Punkt  $\mathfrak{B}f$  im Innern oder auf der (im allgemeinen natürlich ebenfalls unendlich-dimensionalen) Oberfläche einer „Hyperkugel  $\mu$ “ über der Strecke vom Punkt  $m f$  bis zum Punkt  $M f$  als Durchmesser, andererseits nach b) außerhalb oder auf einer „Hyperkugel  $\bar{\mu}$ “ über der Strecke von  $\mu' f$  nach  $\mu'' f$ , falls ein entsprechender, von Punkten des Spektrums freier Abschnitt existiert (Abb. 2.5.1). Natürlich kann es auch beliebig viele solcher

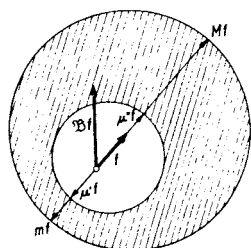


Abb. 2.5.1. Zur Hyperkugel  $\mu$  und den Hyperkugeln  $\bar{\mu}$

Abschnitte geben; beispielsweise kann man bei einem reinen Punktspektrum über jeder Strecke von  $\mu_i f$  nach  $\mu_{i+1} f$  eine solche Hyperkugel  $\bar{\mu}$  konstruieren, wo  $\mu_i$  und  $\mu_{i+1}$  benachbarte Eigenwerte sind. Diese Hyperkugeln „berühren“

einander in den Punkten  $\mu_i$ , und man erhält etwa für genau drei verschiedene Eigenwerte die von den *Mohrschen* Spannungskreisen ([78], S. 61) bekannte Anordnung, welcher, wie sich bald zeigen wird, tatsächlich auch eine innere Verwandtschaft entspricht \*).

Zum Beweis von a) schreiben wir das Normquadrat von  $\mathfrak{B} f - \frac{M+m}{2} f$  mit Hilfe der Spektralfunktion  $\epsilon_\mu$  in der Form (2.4.39) an

$$\|\mathfrak{B} f - \frac{M+m}{2} f\|^2 = \int_{m=0}^M \left( \mu - \frac{M+m}{2} \right)^2 \{f, d\epsilon_\mu f\}. \quad (2.5.3)$$

Andererseits ist nach Voraussetzung

$$0 > \frac{m-M}{2} = m - \frac{M+m}{2} \leq \mu - \frac{M+m}{2} \leq M - \frac{M+m}{2} = \frac{M-m}{2} > 0 \quad (2.5.4)$$

oder kurz

$$\left| \mu - \frac{M+m}{2} \right| \leq \frac{M-m}{2}. \quad (2.5.5)$$

Nun ist für wachsendes  $\mu$ , also  $d\mu > 0$  auch

$$\{f, d\epsilon_\mu f\} \geq 0 \quad (2.5.6)$$

da ein Projektionsoperator stets nicht-negativ definit ist und die Spektralfunktion  $\epsilon_\mu$  nach (2.4.37) mit wachsendem  $\mu$  nicht abnehmen kann. Somit kann man (2.5.3) abschätzen

$$\|\mathfrak{B} f - \frac{M+m}{2} f\|^2 \leq \left( \frac{M-m}{2} \right)^2 \int_{m=0}^M \{f, d\epsilon_\mu f\} = \left( \frac{M-m}{2} \right)^2 \|f\|^2. \quad (2.5.7)$$

Zieht man daraus die Wurzel, so folgt (2.5.1).

Zum Beweis von b) beachten wir, daß nach Voraussetzung im offenen Intervall  $\mu' < \mu < \mu''$  die Spektralfunktion konstant ist, also

$$\{f, d\epsilon_\mu f\} = 0. \quad (2.5.8)$$

Danach kann man dieses Intervall bei der Integration (2.5.3) auslassen und schreiben

$$\|\mathfrak{B} f - \frac{\mu'' + \mu'}{2} f\|^2 = \left( \int_{m=0}^{\mu'} + \int_{\mu''}^M \right) \left( \mu - \frac{\mu'' + \mu'}{2} \right)^2 \{f, d\epsilon_\mu f\} \quad (2.5.9)$$

\*) Aus Satz 1 ergibt sich auch ein Beweis des Einschließungssatzes von *Krylow-Bogoljubow* sowie verwandter Sätze, wie wir in Anhang 2 näher ausführen. Der Verfasser dankt Herrn Professor Lehmann aus Dresden sehr herzlich für diese Anregung.

Nun ist für das erste Teilintegral  $\mu \leq \mu'$ , also

$$\mu - \frac{\mu'' + \mu'}{2} \leq \mu' - \frac{\mu'' + \mu'}{2} = \frac{\mu' - \mu''}{2} < 0 \quad (2.5.10)$$

und für das zweite Teilintegral  $\mu \geq \mu''$ , somit

$$\mu - \frac{\mu'' + \mu'}{2} \geq \mu'' - \frac{\mu'' + \mu'}{2} = \frac{\mu'' - \mu'}{2} > 0 \quad (2.5.11)$$

also für beide Teilintegrale

$$\left| \mu - \frac{\mu'' + \mu'}{2} \right| \geq \frac{\mu'' - \mu'}{2} \quad (2.5.12)$$

Einsetzen in (2.5.9) liefert dann wegen (2.5.6)

$$\|\Im f - \frac{\mu'' + \mu'}{2} f\|^2 \geq \left( \frac{\mu'' - \mu'}{2} \right)^2 \|f\|^2 \quad (2.5.13)$$

also das Quadrat von (2.5.2).

Natürlich kann auch der Fall eintreten, daß weder  $m$  noch  $M$  zum Spektrum gehören, sondern nur Häufungspunkte des Spektrums, nicht aber gleichzeitig Punkte des Spektrums selbst sind. Dann fällt in (2.5.1) das Gleichheitszeichen weg. Entsprechendes gilt für die Randpunkte  $\mu'$  und  $\mu''$  einer „Lücke“ des Spektrums. Gehören sie nicht selbst zum Spektrum, so fällt das Gleichheitszeichen in (2.5.2) weg. Es fällt z. B. auch weg, wenn zwar  $m$ , nicht aber  $M$  zum Spektrum gehört, mit der einzigen Ausnahme der zu  $m$  selbst gehörigen Eigenfunktionen, falls solche existieren. In diesen Fällen wird also das Element  $\Im f$  sogar auf ein offenes oder teilweise offenes Gebiet eingeschränkt. Für die folgenden Überlegungen ist diese Verschärfung indessen ohne Bedeutung; wir werden sie daher weiterhin nicht mehr besonders erwähnen.

Wir geben noch einige Spezialisierungen von Satz 1 an:

**Corollar 1.1:** In der Ebene der als Ortsvektoren aufgetragenen Elemente  $f$  und  $\Im f$  liegt der Punkt  $\Im f$  in dem abgeschlossenen Bereich, welcher von außen begrenzt ist durch den Kreis über dem Durchmesser  $\overline{mf}$ ,  $\overline{Mf}$ , und von innen durch die Kreise über sämtlichen Durchmessern  $\overline{\mu'f}$ ,  $\overline{\mu''f}$ , für die zwischen  $\mu'$  und  $\mu''$  kein Punkt zum Spektrum gehört.

Da die betrachtete Ebene des Funktionenraums erst bestimmt ist, wenn man  $f$  und  $\Im f$  kennt, ist dies nichts weiter als eine andere Formulierung von Satz 1. Denkt man sie in die Zeichenebene im *Euklidischen* Raum abgebildet, so gelangt man zu Abb. 2.5.1. Diese Figur stellt also die tatsächlichen Verhältnisse in der Ebene von  $f$  und  $\Im f$  dar.

**Corollar 1.2:** Besteht das Spektrum genau aus zwei Eigenwerten  $m$  und  $M$  jeweils beliebiger Vielfachheit, so fallen die beiden Hyperkugeln  $\mu$  und  $\bar{\mu}$  zusammen, und  $\Im f$  liegt auf der Oberfläche der Hyperkugel über der Strecke  $\overline{mf}$ ,  $\overline{Mf}$  als Durchmesser.

Im zweidimensionalen *Euklidischen* Raum wird aus der Hyperkugel ein Kreis (Abb. 2.5.2); man erhält die vom *Mohrschen* Kreis der ebenen Spannungs-

zustände (vgl. z. B. [78], S. 63) bekannten Beziehungen. Hier entspricht  $f$  dem gegebenen Normaleneinheitsvektor  $n$  einer Schnittfläche, und der Anwendung des Operators  $\mathfrak{B}$  auf  $f$  die skalare Multiplikation von  $n$  mit dem Spannungstensor  $\sigma$ , welche dem gegebenen  $n$  den zugehörigen, dem Element  $\mathfrak{B}f$  entsprechenden Spannungsvektor  $\sigma \cdot n$  zuordnet, d. h. die Kräftebelegung, die an der Schnittfläche zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts angebracht werden muß. Sind die Komponenten von  $f$  im Hauptachsensystem von  $\mathfrak{B}$  bekannt, so folgt  $\mathfrak{B}f$  aus der in Abb. 2.5.2 angegebenen Konstruktion, aus welcher

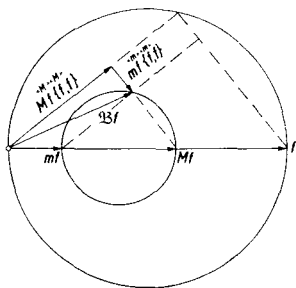


Abb. 2.5.2. Konstruktion von  $\mathfrak{B}f$  im Falle von genau zwei Eigenwerten  $m$  und  $M$  (Mohrscher Kreis in der Ebene)

durch unwesentliche Modifikationen die bekannten zeichnerischen Verfahren mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises hervorgehen. Nach Corollar 1.1 ist diese Konstruktion aber auch im Hilbert-Raum gültig, wenn nur  $\mathfrak{B}$  genau zwei Eigenwerte hat.

**Corollar 1.3:** Besteht das Spektrum von  $\mathfrak{B}$  genau aus drei verschiedenen Eigenwerten  $m$ ,  $\mu$  und  $M$  beliebiger Vielfachheit, so erhält man eine Hyperkugel  $\mu$  und zwei Hyperkugeln  $\bar{\mu}$ , die sich gegenseitig berühren.

Nach Corollar 1.1 erhält man also in der Ebene von  $f$  und  $\mathfrak{B}f$  die Anordnung von Abb. 2.5.3, welche von den drei Mohrschen Kreisen [2, 78] des räumlichen

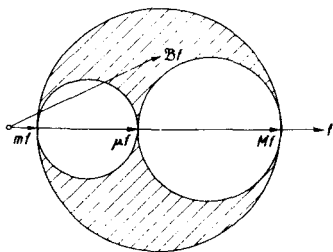


Abb. 2.5.3. Mohrsche Kreise im Raum

Spannungszustandes bekannt ist. In der Tat erhält man dieselbe Figur im dreidimensionalen Euklidischen Raum, wenn man den Spannungstensor  $\sigma$  als einen linearen und symmetrischen Operator betrachtet, welcher einem gegebenen Normaleneinheitsvektor einen Spannungsvektor zuordnet. Eine elementargeometrische Konstruktion zur Abspaltung der zu  $n$  senkrechten Kom-



ponente des Spannungsvektors findet sich in [78], S. 62; ihre Übertragung auf den *Hilbert*-Raum nach Corollar 1.1 ist allerdings erst dann möglich, wenn man darin einen geeigneten dreidimensionalen linearen Unterraum ausgewählt hat, in dem sich die drei für die Konstruktion benötigten Richtungswinkel ([78], S. 62) definieren lassen. Dies ist nach dem sogleich zu formulierenden Satz 2 möglich; indessen bestimmt die Konstruktion auch dann das Element  $\mathfrak{B} f$  nur bis auf eine Drehung um  $f$ . Von praktischer Bedeutung dürfte diese Konstruktion für unsere Zwecke allerdings kaum sein. Dagegen werden wir von ihrer Umkehrung noch Gebrauch machen (vgl. Anhang 3).

**Satz 2:** Besitzt der lineare und symmetrische Operator  $\mathfrak{B}$  ein reines Punktspektrum mit genau  $n$  verschiedenen Eigenwerten  $\mu_i$  beliebiger Vielfachheit, und bezeichnet man mit  $\overset{<ij>}{f}$  ( $j = 1, 2, \dots, N_i; 1 \leq N_i \leq \infty$ ) die zu einem Eigenwert  $\mu_i$  gehörigen Eigenfunktionen, ist ferner  $p(\mathfrak{B})$  ein beliebiges Polynom des Operators  $\mathfrak{B}$  und, falls diese existiert, seiner Inversen, so liegt das Element  $p(\mathfrak{B}) f$  in dem (vom Element  $f$  abhängigen) linearen  $n$ -dimensionalen Unterraum des reellen *Hilbert*-Raums, welcher von den  $n$  (im allgemeinen nicht normierten) Eigenelementen

$$g_{(f)}^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_i} \overset{<ij>}{f} \left\{ \overset{<ij>}{f}, f \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5.14)$$

aufgespannt wird. Dies bleibt auch für  $n = \infty$  gültig.

Nach ([66], Ziff. 106, 107) gilt dieser Satz samt dem folgenden Beweis auch dann noch, wenn  $p(\mathfrak{B})$  einer allgemeineren Funktionenklasse angehört; z. B. kann  $p(\mu)$  eine beliebige beschränkte und rechtsseitig stetige Funktion sein; doch wird diese Erweiterung im folgenden nicht benötigt. Der Beweis ergibt sich einfach durch Umschreiben der Entwicklung (2.4.26)

$$\begin{aligned} p(\mathfrak{B}) f &= \sum_{k=1}^{\infty} p(\mu_k) \overset{<k>}{f} \left\{ \overset{<k>}{f}, f \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n p(\mu_i) \sum_{j=1}^{N_i} \overset{<ij>}{f} \left\{ \overset{<ij>}{f}, f \right\} = \sum_{i=1}^n p(\mu_i) g_{(f)}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Dies ist eine Linearkombination der  $g_{(f)}^{(i)}$ , was zu beweisen war. Da sich durch Linearkombination von Eigenelementen zum selben Eigenwert stets wieder ein Eigenelement ergibt, sind die  $g_{(f)}^{(i)}$  nicht normierte Eigenelemente des Operators  $\mathfrak{B}$ .

In Verbindung mit Corollar 1.2 zeigt Satz 2, daß sich sämtliche Ausdrücke der Form  $p(\mathfrak{B}) f$  für  $n = 2$  symbolisch in einer *Euklidischen* Ebene konstruieren lassen. Für  $n \geq 3$  sind solche Konstruktionen mit Hilfe der darstellenden Geometrie grundsätzlich ebenfalls möglich, ihrer größeren Kompliziertheit wegen jedoch höchstens in Ausnahmefällen zur Verdeutlichung der Zusammenhänge geeignet. Die Bedeutung von Satz 2 liegt vielmehr darin, daß er zuweilen die Wirksamkeit einiger Verfahren zur Konvergenzverbesserung besser zu beurteilen gestattet (§ 5).

An dieser Stelle haben wir auf einen vom Gesichtspunkt der Mechanik wesentlichen Unterschied zwischen einem linearen, zur Erzeugung einer Iterationsfolge geeigneten Operator  $\mathfrak{B}$  einerseits und einem Operator von der Art des Spannungstensors  $\sigma$  andererseits hinzuweisen. Der Spannungstensor  $\sigma$  ist eine physikalische Größe von der „Dimension“ (im Sinne des Größenkalküls der Physik, [79], S. 34; im folgenden kurz als „ $g$ -Dimension“ bezeichnet) Kraft/Fläche; er wird angewandt durch skalare Multiplikation auf einen Flächennormalen-Einheitsvektor, also auf ein „Zahlengebilde“, wenn wir mit diesem Ausdruck sämtliche im Sinne des Größenkalküls der Physik „dimensionslosen“ konstanten und veränderlichen Skalare, Vektoren, Tensoren, Funktionen, Operatoren usw. bezeichnen wollen. Denkt man also in Abb. 2.5.2 für den Operator  $\mathfrak{B}$  den Spannungstensor  $\sigma$  eingesetzt, und für das Element  $f$  den Einheitsvektor  $n$ , so bezeichnen  $f$  und  $\mathfrak{B} f$  physikalisch verschiedenartige Größen, und die Maßstabsfaktoren für  $f$  einerseits und für  $\mathfrak{B} f$  sowie die Hyperkugel  $\mu$  andererseits können unabhängig voneinander gewählt werden. Wiederholung der Operation mit dem Spannungstensor  $\sigma$  hat ersichtlich keinen vernünftigen physikalischen Sinn; allgemein ist die — in irgendeinem Sinn definierte — Multiplikation und die Potenzbildung von Größen nicht verschwindender  $g$ -Dimension nicht möglich, ohne daß ein Produkt anderer  $g$ -Dimension, also anderer physikalischer Bedeutung, erscheint. Ein solches Produkt ist aber nur in Ausnahmefällen sinnvoll; auf keinen Fall kann das Potenzieren derartiger Größen beliebig oft wiederholt werden, ohne daß schließlich physikalisch sinnlose Größen herauskommen.

Im Gegensatz dazu darf eine Iterationsfolge nur physikalisch gleichartige Größen enthalten, wenn sie physikalisch sinnvoll sein soll. Ein linearer Operator  $\mathfrak{B}$ , der durch wiederholte Anwendung eine Iterationsfolge erzeugen soll, darf also die  $g$ -Dimension des Elementes  $f$  nicht verändern, auf das er angewandt wird. Im Verlaufe der Iteration dürfen nur die Zahlenwerte wechseln, nicht die Einheiten. Daraus folgt, daß der Operator  $\mathfrak{B}$  ein reines Zahlengebilde sein muß, wenn er in einem Iterationsverfahren Verwendung finden soll. Bei reinen Zahlengebilden haben aber Potenzen im allgemeinen auch einen physikalisch zu rechtfertigenden Sinn, da sie sich bei einer — in einem verallgemeinerten Sinne verstandenen — Multiplikation nur auf die Zahlenwerte, nicht aber auf die Maßeinheiten auswirken. Ist der lineare und symmetrische Operator  $\mathfrak{B}$  ein reines Zahlengebilde, so gilt dies auch für seine Spektralfunktion, insbesondere auch für seine Eigenfunktionen und Eigenwerte, sofern sie vorhanden sind, sowie für die obere und untere Grenze seines Spektrums. In Abb. 2.5.1–3 gilt damit für  $f$  und  $\mathfrak{B} f$  derselbe Maßstabsfaktor; er kann somit in diesem Fall nur einmal, und zwar einheitlich für die ganze Figur, bestimmt werden. Wir werden in dieser Arbeit im allgemeinen nur Potenzen reiner Zahlengebilde verwenden und in üblicher Weise durch einen rechts hochgestellten Index bezeichnen; bei Größen nicht verschwindender  $g$ -Dimension — mit Ausnahme einiger häufig vorkommender Konstanten und skalarer Funktionale — bezeichnet dagegen ein solcher Index eine Zählung und keine Potenz. Da es sich hier bei diesen Größen fast ausnahmslos um Vektor- und Tensorfunktionen handelt, ist eine Verwechslung kaum möglich. Produkte derartiger Größen mit sich selbst werden wir im allgemeinen ausschreiben. Wir überlegen nun, wieweit sich die Abschätzungen von Satz 1 auf die Summe

zweier Operatoren übertragen lassen. Zunächst seien  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  zwei beliebige lineare und symmetrische Operatoren, dann gilt für die nach (2.4.5) definierte Norm des Summenoperators

$$\|\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2\| \leq \|\mathfrak{B}_1\| + \|\mathfrak{B}_2\| \quad (2.5.16)$$

wie sich aus der Dreiecksungleichung (2.2.3) leicht ableiten läßt. Diese Abschätzung liefert zugleich eine Schranke für den Betrag der Grenzen des Operatorspektrums. Weitergehende Aussagen sind im allgemeinen nicht möglich; es lassen sich nur in Sonderfällen weitergehende Abschätzungen (z. B. die Sätze von *Courant*, *Weyl* und *Fischer* für vollstetige Operatoren [66], Ziff. 95; [40], S. 192) oder allgemeine qualitative Aussagen machen (z. B. die Sätze von *Weyl* und *Neumann* über die Häufungspunkte des Spektrums [66], Ziff. 134). Wir betrachten nun einen Sonderfall, in dem sich die Spektralfunktion des Summenoperators sogar exakt angeben läßt.

**Satz 3:** Es seien  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$  zwei lineare symmetrische Operatoren derart, daß

$$\{g \mathfrak{B}'', \mathfrak{B}' f\} = 0 \quad (2.5.17)$$

ist für alle  $f, g$  des betrachteten *Hilbert*-Raumes.

a) Dann gilt für die untere Grenze  $m$  und die obere Grenze  $M$  des Operators

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'' \quad (2.5.18)$$

$$m = \min(m', m'') \quad (2.5.19)$$

$$M = \max(M', M'') \quad (2.5.20)$$

wo  $m', M'$  bzw.  $m'', M''$  die Grenzen der Spektren von  $\mathfrak{B}'$  bzw.  $\mathfrak{B}''$  sind, mit Ausnahme der unter c) genannten Fälle.

b) Ist ferner für alle Elemente  $f \neq 0$  des betrachteten *Hilbert*-Raums

$$\|\mathfrak{B}' f\| + \|\mathfrak{B}'' f\| \geq \overset{*}{m} \|f\|, \quad \overset{*}{m} > 0 \quad (2.5.21)$$

so besitzt  $\mathfrak{B}$  eine Inverse.

c) Sind bei Gültigkeit von (2.5.21)  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$  nicht-negativ definit, und gibt es zwei positive Zahlen  $\overset{+}{m}'$  und  $\overset{+}{m}''$  derart, daß in den Intervallen  $0 < \mu < \overset{+}{m}'$  bzw.  $0 < \mu < \overset{+}{m}''$  kein Punkt zum Spektrum von  $\mathfrak{B}'$  bzw.  $\mathfrak{B}''$  gehört, so gilt

$$m = \min(\overset{+}{m}', \overset{+}{m}'') \quad (2.5.22)$$

Eine entsprechende Aussage gilt für nicht-positiv definite Operatoren.

Der Satz besagt, daß sich bei Gültigkeit der Orthogonalitätsbeziehung (2.5.17) die Grenzen der Operatorspektren nicht etwa in irgendeiner Weise addieren, sondern daß die Grenzen des neuen Spektrums die Grenzen der Vereinigungsmenge beider Spektren sind. Eine Ausnahme bildet der Eigenwert Null; es kann sein, daß er im Spektrum des Summenoperators ganz wegfällt; es sind

sogar Fälle denkbar, daß das Spektrum des Summenoperators (2.5.18) einen kleineren Abschnitt der reellen Achse umfaßt als das Spektrum eines der beiden Summanden. Satz 3 ergibt sich — unter Beachtung von Satz 1 und (2.4.35) — sofort aus dem folgenden

**Satz 4:** Es seien  $\mathfrak{B}'$ ,  $\mathfrak{B}''$  und  $\mathfrak{B}$  die in Satz 3, (2.5.17–18) erklärten Operatoren,  $\epsilon'_\mu$ ,  $\epsilon''_\mu$  und  $\epsilon_\mu$  ihre Spektralfunktionen. Wir schreiben ferner zur Abkürzung für den Sprung von  $\epsilon'_\mu$  bzw.  $\epsilon''_\mu$  an der Stelle  $\mu = 0$

$$d\epsilon'_{-0} = \epsilon'_0 - \epsilon'_{-0} \quad (2.5.23)$$

$$d\epsilon''_{-0} = \epsilon''_0 - \epsilon''_{-0} \quad (2.5.24)$$

und bezeichnen mit

$$\delta^{(0)}(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu < 0 \\ 1 & \text{für } \mu \geq 0 \end{cases} \quad (2.5.25)$$

die rechtsseitig stetige *Heavisidesche* Sprungfunktion. Dann ist die Spektralfunktion des Operators  $\mathfrak{B}$

$$\epsilon_\mu = \epsilon'_\mu + \epsilon''_\mu - \delta^{(0)}(\mu) (d\epsilon'_{-0} + d\epsilon''_{-0} - d\epsilon'_{-0} d\epsilon''_{-0}) \quad (2.5.26)$$

Außerdem gilt, wenn wir mit  $\mathfrak{E}$  den Einheitsoperator bezeichnen, der jedes Element  $f$  des betrachteten *Hilbert*-Raums in sich selbst überführt

$$d\epsilon'_{-0} + d\epsilon''_{-0} - d\epsilon'_{-0} d\epsilon''_{-0} = \mathfrak{E} \quad (2.5.27)$$

Gleichung (2.5.26) läßt sich also kürzer schreiben

$$\epsilon_\mu = \epsilon'_\mu + \epsilon''_\mu - \delta^{(0)}(\mu) \mathfrak{E} \quad (2.5.28)$$

Wir versuchen zunächst, uns die Bedeutung dieses Satzes in halbanschaulicher Weise klarzumachen und betrachten dazu ein analoges Beispiel aus dem dreidimensionalen *Euklidischen* Raum, nämlich die Addition der beiden Spannungszustände

$$\underline{\sigma}' \triangleq \sigma'_{xx} = \sigma_I, \quad \sigma'_{yy} = \sigma_{II}, \quad \text{alle anderen } \sigma'_{ij} = 0 \quad (2.5.29)$$

$$\underline{\sigma}'' \triangleq \sigma''_{zz} = \sigma_{III}, \quad \text{alle anderen } \sigma''_{ij} = 0 \quad (2.5.30)$$

$$0 < \sigma_I \leq \sigma_{II} \leq \sigma_{III} \quad (2.5.31)$$

Die Hauptachsen dieser beiden Spannungstensoren sind die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse; die Hauptspannung Null kommt in (2.5.29) einmal, in (2.5.30) zweimal vor, nicht mehr dagegen in der Summe

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}' + \underline{\sigma}'' \triangleq \sigma_{xx} = \sigma_I, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{II}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{III}, \quad \text{alle anderen } \sigma_{ij} = 0 \quad (2.5.32)$$

Wegen (2.5.31) ist der größte *Mohrsche* Kreis von  $\underline{\sigma}$  kleiner als der größte *Mohrsche* Kreis von  $\underline{\sigma}''$ .

Wenn man den Eigenwerten der Spannungszustände gemäß ihrer physikalischen Bedeutung als Hauptspannungen und mit ihnen der reellen Veränderlichen  $\mu$  die  $g$ -Dimension einer Spannung (Kraft/Fläche) zuschreibt, so lassen

sich die Spektralfunktionen als reine Zahlengebilde, nämlich  $g$ -dimensionslose Matrizenfunktionen, definieren. Gemäß (2.4.31–33) erhält man

$$\epsilon'_\mu = \delta^{(0)}(\mu - \sigma_I) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta^{(0)}(\mu - \sigma_{II}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta^{(0)}(\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.33)$$

$$\epsilon''_\mu = \delta^{(0)}(\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta^{(0)}(\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta^{(0)}(\mu - \sigma_{III}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.34)$$

$$\epsilon_\mu = \delta^{(0)}(\mu - \sigma_I) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta^{(0)}(\mu - \sigma_{II}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta^{(0)}(\mu - \sigma_{III}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.35)$$

Weiter wird aus den Größen (2.5.23–24)

$$d\epsilon'_{-0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.36)$$

$$d\epsilon''_{-0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.37)$$

und offensichtlich

$$d\epsilon'_{-0} d\epsilon''_{-0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.38)$$

Im dreidimensionalen *Euklidischen* Raum erfüllen  $\sigma'$  und  $\sigma''$  die Orthogonalitätsbedingung (2.5.17); sie bedeutet hier, daß sämtliche von  $\sigma'$  erzeugten Spannungsvektoren senkrecht stehen auf sämtlichen von  $\sigma''$  erzeugten Spannungsvektoren. An Hand von (2.5.33–38) prüft man nun auch leicht nach, daß die Behauptungen von Satz 4 in diesem Falle zutreffen. Ein weiteres Beispiel, das wir hier jedoch nicht im einzelnen ausführen wollen, erhält man, wenn man in (2.5.29)  $\sigma'$  ersetzt durch

$$\sigma'^* \triangleq \sigma'^*_{xx} = \sigma_I, \quad \text{alle anderen } \sigma'^*_{ij} = 0 \quad (2.5.39)$$

Es ist dann z. B.

$$d\epsilon'_{-0} d\epsilon''_{-0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.40)$$

Auch hier ist Satz 4 leicht nachzuprüfen.

Der allgemeine Beweis von Satz 4 im *Hilbert*-Raum ist freilich weit umfangreicher; wir müssen uns hier aus Raumgründen mit einer kurzen Skizze des Beweisganges begnügen. Zunächst kann  $\mathfrak{B}'$  nicht so beschaffen sein, daß  $\mathfrak{B}' f$  sämtliche Elemente des betrachteten *Hilbert*-Raums durchläuft, wenn für  $f$  nacheinander sämtliche Elemente eingesetzt werden. Mit anderen Worten, der Bildbereich oder „Bildraum“ von  $\mathfrak{B}'$  kann nicht den ganzen Definitionsbereich, in unserem Falle den ganzen vorgelegten *Hilbert*-Raum umfassen, es

sei denn, daß  $\mathfrak{B}''$  der Nulloperator ist, was wir hier als trivialen Sonderfall ausschließen wollen. Denn andernfalls könnte man  $f$  und  $g$  stets so wählen, daß

$$g \mathfrak{B}'' = \mathfrak{B}' f \neq 0 \quad (2.5.41)$$

im Widerspruch zu (2.5.17). Also kann  $\mathfrak{B}'$  keine beschränkte Inverse  $\mathfrak{B}'^{-1}$  haben, da sonst für jedes vorgegebene  $g \neq 0$ ,  $\mathfrak{B}'' g \neq 0$

$$f = g \mathfrak{B}'' \mathfrak{B}'^{-1} = \mathfrak{B}'^{-1} \mathfrak{B}'' g \quad (2.5.42)$$

die Gleichung (2.5.41) erfüllen würde. Nach (2.4.35) bedeutet dies aber, daß es keine endliche Umgebung von  $\mu = 0$  geben darf, in der kein Punkt zum Spektrum von  $\mathfrak{B}'$  gehört.  $\mu = 0$  muß demnach entweder selbst zum Spektrum gehören oder wenigstens ein Häufungspunkt des Spektrums sein.

Aber auch die zweite Möglichkeit, daß  $\mu = 0$  ein selbst nicht zum Spektrum gehöriger Häufungspunkt ist, kann ausgeschlossen werden. Zwar ist dann (2.5.41) nicht mehr in allen Fällen erfüllbar, aber man kann immer noch zu jedem vorgegebenen  $g \neq 0$ ,  $g \mathfrak{B}'' \neq 0$  ein Element  $f$  finden, welches die Bedingung (2.5.17) verletzt.  $\mu = 0$  ist dann entweder Häufungspunkt eines Punktspektrums oder äußerer Randpunkt eines „kontinuierlichen Spektrums“ ([62], S. 44, [66], Ziff. 132) oder „Streckenspektrums“ ([40], S. 455) oder beides zugleich, da sich Punkt- und Streckenspektrum überlagern können. Das erste ist z. B. bei vollstetigen Operatoren der Fall [40, 41, 62, 66, 67]. wenn  $\mu = 0$  nicht selbst zu ihren Eigenwerten gehört.

Wir betrachten zuerst den Fall des Häufungspunktes  $\mu = 0$  im reinen Punktspektrum. Dann kann es sein, daß in der (2.4.20) entsprechenden Entwicklung nach den Eigenelementen  $\overset{<i>{<i>f'</i></i>}}{f'}$  von  $\mathfrak{B}'$

$$g \mathfrak{B}'' = \mathfrak{B}'' g = \sum_{i=1}^{\infty} \overset{<i>{<i>f'</i></i>}}{f'} \left\{ \overset{<i>{<i>f'</i></i>}}{f'}, \mathfrak{B}'' g \right\} \quad (2.5.43)$$

sämtliche Skalarprodukte  $\left\{ \overset{<i>{<i>f'</i></i>}}{f'}, \mathfrak{B}'' g \right\}$  verschwinden, für welche der zu  $\overset{<i>{<i>f'</i></i>}}{f'}$  gehörige Eigenwertbetrag  $|\mu_i'|$  kleiner ist als eine gewisse positive Zahl  $\mu^*$ . Dann läßt sich (2.5.41) durch Anwendung von (2.4.28) auf  $g \mathfrak{B}''$  erfüllen. Ist dies aber nicht der Fall, so entfernt man aus der Entwicklung (2.4.43) alle Glieder, für die  $|\mu_i'|$  kleiner ist als eine vorgegebene positive Zahl  $\mu^*$  und erhält damit das Element

$$f = \sum_{\substack{i=1 \\ |\mu_i'| \geq \mu^*}}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^*} \overset{<i>{<i>f'</i></i>}}{f'} \left\{ \overset{<i>{<i>f'</i></i>}}{f'}, \mathfrak{B}'' g \right\} \quad (2.5.44)$$

welches zwar (2.5.41) nicht erfüllt, aber (2.5.17) verletzt, wenn man nur  $\mu^*$  klein genug wählt.

Falls nun aber  $\mu = 0$  ein Randpunkt oder sogar, wie sich gleich zeigen wird, ein innerer Punkt eines kontinuierlichen Spektrums ist, so kann wegen der

damit verbundenen Stetigkeit von  $\epsilon'_\mu$  die Norm  $\|\mathfrak{B}'' g\|$  nur dann von Null verschieden sein, wenn

$$\|\mathfrak{B}'' g, d\epsilon'_\mu \mathfrak{B}'' g\| > 0 \quad \text{für} \quad d\mu > 0 \quad (2.5.45)$$

ist in einem nicht verschwindenden Intervall, evtl. mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maß Null. Wenn jetzt in der Spektraldarstellung nach (2.4.32)

$$\mathfrak{B}'' g = \int_{m'-0}^{M'} d\epsilon'_\mu \mathfrak{B}'' g \quad (2.5.46)$$

der Integrand in der Umgebung von  $\mu = 0$  nicht verschwindet, so läßt sich stets eine positive Zahl  $\mu^*$  derart finden, daß

$$f = \left( \int_{m'-0}^{-\mu^*} + \int_{\mu^*}^{M'} \right) \frac{1}{\mu} d\epsilon'_\mu \mathfrak{B}'' g \quad (2.5.47)$$

zwar nicht (2.5.41) erfüllt, wohl aber (2.5.17) verletzt. Man erkennt leicht, daß diese Überlegung nicht davon abhängt, ob  $\mu = 0$  als Randpunkt selbst zum Spektrum gehört oder nicht, oder ob der Ursprung der  $\mu$ -Achse ein innerer Punkt des Streckenspektrums ist. Die Überlagerung von Punkt- und Streckenspektrum, für die die Darstellung (2.5.46–47) ebenfalls gilt, bietet nun keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr; wir verzichten darauf, dies im einzelnen auszuführen.

Demnach muß bei Gültigkeit von (2.5.17) wenigstens ein Element  $f'_0$  existieren derart, daß  $\mathfrak{B}' f'_0 = 0$  ist. Möglicherweise gibt es aber auch mehrere oder sogar unendlich viele derartige Elemente, die in ihrer Gesamtheit den Nullraum des Operators  $\mathfrak{B}'$  aufspannen. Mit Hilfe eines Orthonormierungsprozesses nach Gram und Schmidt ([40], S. 21; [66], Ziff. 33; [73], S. 50) erhält man

daraus ein Orthogonalsystem von normierten Eigelementen  $f'^{<0i>}$  des Operators  $\mathfrak{B}'$  zum Eigenwert  $\mu = 0$ , und der linksseitige Sprung  $d\epsilon'_{-0}$  von  $\epsilon'_\mu$  nach (2.5.23) läßt sich in der symbolischen („dyadischen“) Form (2.4.21) folgendermaßen anschreiben

$$d\epsilon'_{-0} \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} \begin{matrix} <0i> \\ f' \end{matrix} \begin{matrix} <0i> \\ f' \end{matrix} \quad (2.5.48)$$

Im Anschluß an (2.5.40) hatten wir schon den Begriff des Bildraums eines Operators  $\mathfrak{B}'$  eingeführt; wir definieren ihn nun genauer als den kleinsten linearen Unterraum des vorliegenden *Hilbert*-Raums, welcher sämtliche nicht verschwindenden Elemente der Form  $\mathfrak{B}' f$  enthält. Nach der Spektraldarstellung (2.4.33) ist er für einen symmetrischen Operator identisch mit dem kleinsten derjenigen linearen Unterräume, deren Elemente  $f$  ausreichen, um sämtliche möglichen Elemente  $\mathfrak{B}' f$  des Bildraums zu erzeugen. Mit anderen Worten, durchläuft  $f$  sämtliche Elemente des Bildraums von  $\mathfrak{B}'$ , so durchläuft auch  $\mathfrak{B}' f$  sämtliche Elemente des Bildraums; bei der Umkehrung können noch beliebige Elemente des Nullraums addiert werden. Soll also die Spektraldarstellung (2.4.32) für jedes  $f$  des betrachteten *Hilbert*-Raums gelten, so müs-

sen sich Nullraum und Bildraum des Operators  $\mathfrak{B}'$  zum vollen *Hilbert*-Raum ergänzen. Demnach ist

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{E} - d\epsilon'_{-0} \quad (2.5.49)$$

denjenige Projektionsoperator, welcher ein beliebiges Element  $f$  auf den Bildraum von  $\mathfrak{B}'$  projiziert. Ganz entsprechende Überlegungen lassen sich zum Nullraum und Bildraum von  $\mathfrak{B}''$  anstellen; die Gleichungen (2.5.41–49) gelten auch noch, wenn man  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$  vertauscht.

Wir betrachten nun die Beziehungen zwischen den Spektralfunktionen der beiden Operatoren  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$ . Zunächst müssen wir verlangen, daß die Bildräume beider Operatoren kein Element gemeinsam haben, denn andernfalls wäre (2.5.17) verletzt. Wir müssen also verlangen

$$\mathfrak{F}' \mathfrak{F}'' = \mathfrak{F}'' \mathfrak{F}' = \mathfrak{O} \quad (2.5.50)$$

wo  $\mathfrak{O}$  der Nulloperator ist. D. h., die beiden Bildräume von  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$  mit den zugehörigen Projektionsoperatoren müssen zueinander orthogonal sein ([66], Ziff. 105). Schreibt man das erste Produkt  $\mathfrak{F}' \mathfrak{F}''$  in (2.5.50) nach (2.5.49) aus, so folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}' \mathfrak{F}'' &= (\mathfrak{E} - d\epsilon'_{-0}) (\mathfrak{E} - d\epsilon''_{-0}) \\ &= \mathfrak{E} - d\epsilon'_{-0} - d\epsilon''_{-0} + d\epsilon'_{-0} d\epsilon''_{-0} = \mathfrak{O} \end{aligned} \quad (2.5.51)$$

Durch Vergleich mit dem entsprechenden Ausdruck für  $\mathfrak{F}'' \mathfrak{F}'$  erkennt man, daß  $d\epsilon'_{-0}$  und  $d\epsilon''_{-0}$  vertauschbar sind, also

$$d\epsilon'_{-0} d\epsilon''_{-0} \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \langle 0i \rangle & \langle 0j \rangle \\ f' & f'' \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \langle 0i \rangle & \langle 0j \rangle \\ f' & f'' \end{matrix} \quad (2.5.52)$$

wieder eine Projektion darstellt ([66], Ziff. 105), und zwar die Projektion auf den „Durchschnitt“, d. h. die Gesamtheit der gemeinsamen Elemente, der beiden Nullräume von  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$ . Aus (2.5.51) erhält man sofort (2.5.27), also eine der zu beweisenden Gleichungen von Satz 4. Die Gleichung bedeutet, daß die beiden Nullräume von  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$  den ganzen *Hilbert*-Raum zumindest einmal überdecken; sie überdecken ihn genau einmal, wenn ihr Durchschnitt und mit ihm der Projektionsoperator (2.5.52) verschwindet. Der Bildraum des Summenoperators  $\mathfrak{B}$  ist offenbar die Gesamtheit aller Elemente  $f$  für die nicht gleichzeitig  $\mathfrak{B}' f$  und  $\mathfrak{B}'' f$  verschwindet, also die Summe der beiden Bildräume von  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$ , und der zugehörige Projektionsoperator nach (2.5.49–51)

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}' + \mathfrak{F}'' = 2\mathfrak{E} - d\epsilon'_{-0} - d\epsilon''_{-0} = \mathfrak{E} - d\epsilon'_{-0} d\epsilon''_{-0} \quad (2.5.53)$$

Sein Nullraum ist demnach der Durchschnitt der Nullräume von  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$  mit dem zugehörigen Projektionsoperator (2.5.52). In der Tat ist dieser Nullraum von  $\mathfrak{B}$  orthogonal zu den Bildräumen von  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$  und damit auch von  $\mathfrak{B}$ , denn es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}' d\epsilon'_{-0} d\epsilon''_{-0} &= \mathfrak{E} d\epsilon'_{-0} d\epsilon''_{-0} - d\epsilon'_{-0} d\epsilon''_{-0} d\epsilon''_{-0} \\ &= d\epsilon'_{-0} d\epsilon''_{-0} - d\epsilon'_{-0} d\epsilon''_{-0} = \mathfrak{O} \end{aligned} \quad (2.5.54)$$

und ebenso

$$\mathfrak{F}'' d\epsilon'_{-0} d\epsilon''_{-0} = \mathfrak{O} \quad (2.5.55)$$



Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, den Verlauf der Spektralfunktion (2.5.26) des Summenoperators  $\mathfrak{B}$  im einzelnen zu diskutieren. Zu prüfen ist, ob für diese Spektralfunktion die Orthogonalitätsrelation (2.4.38) sowie die Entwicklungen (2.4.32–34) und, falls (2.5.21) erfüllt ist, auch (2.4.35) allgemein gelten. Für  $\mu < 0$  trifft (2.4.38) jedenfalls zu, da dort  $\epsilon'_\mu$  und  $\epsilon''_\mu$  den jeweiligen Bildräumen von  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$ , also zueinander orthogonalen Unterräumen, angehören. Auch von der Gültigkeit der Entwicklungen (2.4.32–34) sowie gegebenenfalls (2.4.35) überzeugt man sich in diesem Gebiet ohne Schwierigkeit. An der Stelle  $\mu = 0$  wächst jedoch  $\epsilon'_\mu$  um  $d\epsilon'_{-0}$  und  $\epsilon''_\mu$  um  $d\epsilon''_{-0}$  an; der Zuwachs  $d\epsilon'_{-0} + d\epsilon''_{-0}$  überdeckt bereits den Bildraum des Summenoperators einmal und seinen Nullraum sogar zweimal, wie man aus (2.5.53) durch Auflösen nach  $d\epsilon'_{-0} + d\epsilon''_{-0}$  ableitet. Tatsächlich muß aber die Spektralfunktion  $\epsilon_\mu$  von  $\mathfrak{B}$  zwischen  $\mu = -0$  und  $\mu = 0$  genau um den Projektionsoperator  $d\epsilon'_{-0} + d\epsilon''_{-0}$  auf den Nullraum von  $\mathfrak{B}$  nach (2.5.52) zunehmen; andernfalls wird die Orthogonalitätsbeziehung (2.4.38) für  $\mu'' > 0$  verletzt, und die Spektraldarstellungen (2.4.32) und (2.4.34) für  $p(0) \neq 0$  gelten nicht mehr allgemein. Zieht man also von dem linksseitigen Sprung an der Stelle  $\mu = 0$  die Summe  $d\epsilon'_{-0} + d\epsilon''_{-0}$  ab und addiert  $d\epsilon'_{-0} + d\epsilon''_{-0}$ , so kommt man auf (2.5.26) und mit Hilfe der bereits bewiesenen Gleichung (2.5.27) auf (2.5.28). Die weiteren Zuwächse der Summanden  $\epsilon'_\mu$  und  $\epsilon''_\mu$  für  $\mu \geq 0$  gehören wieder den zueinander orthogonalen Bildräumen von  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$  an, so daß die Gültigkeit der geforderten Orthogonalitätsbeziehungen und Spektraldarstellungen leicht nachzuweisen ist. Damit ist der Beweis von Satz 4 vollständig.

Die für uns wichtigsten Teilaussagen von Satz 4 fassen wir in vereinfachter Form zusammen durch

**Corollar 4.1:** Das Spektrum des Summenoperators  $\mathfrak{B}$  in (2.5.18) ergibt sich bei Gültigkeit der Orthogonalitätsbeziehung (2.5.17) von Satz 3 als die Vereinigungsmenge der Spektren der beiden Summanden  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$ . Eine Ausnahme kann nur der Punkt  $\mu = 0$  bilden; er fällt im Spektrum des Summenoperators  $\mathfrak{B}$  weg, wenn es kein Element  $f$  gibt, für das gleichzeitig  $\mathfrak{B}' f$  und  $\mathfrak{B}'' f$  verschwindet.

Diese Aussagen genügen bereits zum Beweis von Satz 3.

Einfache Aussagen über das Spektrum erhält man auch, wenn man einen beliebigen linearen und symmetrischen Operator  $\mathfrak{A}$  mit dem Einheitsoperator  $\mathfrak{E}$  linear kombiniert; dies liegt einfach daran, daß man nach (2.4.32) dem Einheitsoperator jede beliebige Spektralfunktion „unterlegen“ kann. Es gilt der folgende

**Satz 5:**  $\mathfrak{A}$  sei ein linearer und symmetrischer Operator in einem reellen Hilbert-Raum;  $\epsilon^{\mathfrak{A}}_\mu$  sei seine Spektralfunktion,  $k$  bzw.  $K$  seine untere bzw. obere Grenze und  $\alpha$  eine feste Zahl. Dann gilt

a) Die Spektralfunktion des Operators

$$\mathfrak{B}^* = \alpha \mathfrak{E} + \mathfrak{A} \quad (2.5.56)$$

ist

$$\epsilon^{\mathfrak{B}^*}_\mu = \epsilon^{\mathfrak{A}}_{\mu-\alpha} \quad (2.5.57)$$

Die einzelnen Punkte und die Grenzen der Spektren beider Operatoren lassen sich ineinander überführen durch die Transformation

$$\mu = \kappa + \alpha \quad (2.5.58)$$

$$m^* = k + \alpha, \quad M^* = K + \alpha \quad (2.5.59)$$

b) Die Spektralfunktion des Operators

$$\mathfrak{B}^{**} = \alpha \mathfrak{E} - \mathfrak{A} \quad (2.5.60)$$

ist

$$\in_{\mu}^{\mathfrak{B}^{**}} = \mathfrak{E} - \in_{\alpha - \mu - 0}^{\mathfrak{A}} \quad (2.5.61)$$

Hierbei ist  $\in_{\alpha - \mu - 0}^{\mathfrak{A}}$  derjenige in Abhängigkeit von  $\mu$  veränderliche Projektionsoperator, welcher in den Stetigkeitspunkten mit der linksseitig stetigen Funktion  $\in_{\alpha - \mu}^{\mathfrak{A}}$  übereinstimmt, an den Sprungstellen aber rechtsseitig stetig ist. Die einzelnen Punkte und die Grenzen der Spektren beider Operatoren lassen sich ineinander überführen durch die Transformation

$$\mu = \alpha - \kappa \quad (2.5.62)$$

$$M^{**} = \alpha - k, \quad m^{**} = \alpha - K \quad (2.5.63)$$

Wir geben noch eine anschauliche Formulierung der Aussagen (2.5.58–59, 62–63) in

**Corollar 5.1:** Das Spektrum des Operators  $\mathfrak{B}^*$  nach (2.5.56) erhält man aus dem Spektrum des Operators  $\mathfrak{A}$  durch Verschiebung um  $\alpha$  nach rechts.

**Corollar 5.2:** Das Spektrum des Operators  $\mathfrak{B}^{**}$  nach (2.5.60) erhält man aus dem Spektrum des Operators  $\mathfrak{A}$  durch Spiegelung an  $\mu = 0$  und anschließende Verschiebung um  $\alpha$  nach rechts.

Nach diesen beiden Corollaren kann man die in Satz 1 erklärten Hyperkugelsysteme für die Operatoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}^*$  durch eine einfache Translation, und die Hyperkugelsysteme für die Operatoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}^{**}$  durch eine Spiegelung und eine Translation ineinander überführen, wobei die Spiegelebene noch senkrecht zu der durch das Element  $f$  bestimmten Translationsrichtung liegt.

Beim Beweis überzeugt man sich zunächst, daß  $\in_{\mu}^{\mathfrak{B}^*}$  in (2.5.57) und  $\in_{\mu}^{\mathfrak{B}^{**}}$  in (2.5.61) gleichzeitig mit  $\mathfrak{A}$  die Bedingungen (2.4.31, 37, 38) erfüllen, was ohne Schwierigkeiten möglich ist und hier nicht im einzelnen durchgeführt werden soll. Wir prüfen weiter nach, ob die Spektraldarstellungen (2.4.36) beider Seiten von (2.5.56) bzw. (2.5.60) mit Hilfe der Transformationen (2.5.57–59) bzw. (2.5.61–63) und ihrer Polynome ineinander übergehen, wobei wir bemerken, daß jedes Polynom in den rechten Seiten von (2.5.56, 60) wieder ein Polynom in  $\mathfrak{A}$  ist. Im einzelnen verläuft die Rechnung folgendermaßen:

Fall a): Dem aus (2.5.56) gebildeten Polynom

$$p(\mathfrak{B}^*) = p(\alpha \mathfrak{E} - \mathfrak{A}) \quad (2.5.64)$$

muß in der Spektraldarstellung (2.4.36) die Beziehung

$$\int_{m-0}^M p(\mu) d\in_{\mu}^{\mathfrak{B}^*} = \int_{k-0}^K p(\alpha + \kappa) d\in_{\kappa}^{\mathfrak{A}} \quad (2.5.65)$$

entsprechen. In der Tat erhält man durch Einsetzen von (2.5.57–59)

$$\int_{k=0}^K p(\alpha + \kappa) d\epsilon_{\kappa}^{\mathfrak{A}} = \int_{k+\alpha=0}^{K+\alpha} p(\mu) d\epsilon_{\mu-\alpha}^{\mathfrak{A}} = \int_{m=0}^M p(\mu) d\epsilon_{\mu}^{\mathfrak{B}^*} \quad (2.5.66)$$

Fall b): Dem aus (2.5.60) gebildeten Polynom

$$p(\mathfrak{B}^{**}) = p(\alpha \mathfrak{E} - \mathfrak{A}) \quad (2.5.67)$$

muß in der Spektraldarstellung (2.4.36) die Beziehung

$$\int_{m=0}^M p(\mu) d\epsilon_{\mu}^{\mathfrak{B}^{**}} = \int_{k=0}^K p(\alpha - \kappa) d\epsilon_{\kappa}^{\mathfrak{A}} \quad (2.5.68)$$

entsprechen. In der Tat erhält man durch Einsetzen von (2.5.61–63)

$$\int_{k=0}^K p(\alpha - \kappa) d\epsilon_{\kappa}^{\mathfrak{A}} = \int_{a-k=0}^{\alpha-K} p(\mu) d\epsilon_{\alpha-\mu}^{\mathfrak{A}} = \int_{M+0}^m p(\mu) d(\mathfrak{E} - \epsilon_{\mu+0}^{\mathfrak{B}^{**}}) = \int_{m=0}^M p(\mu) d\epsilon_{\mu}^{\mathfrak{B}^{**}} \quad (2.5.69)$$

Schließlich läßt sich der Nachweis der Äquivalenz der Spektraldarstellungen auf allgemeinere Operatorfunktionen erweitern ([66], Ziff. 106), worauf wir hier nicht mehr weiter eingehen wollen.

Wichtig ist noch die Bemerkung, daß die Grenzen  $m$  und  $M$  des Spektrums mit den sogenannten „Grenzen des Operators“ zusammenfallen. Wir formulieren dies folgendermaßen:

**Satz 6:** Bezeichnet man als „ $\mu$ -Kreis“ den Schnittkreis der Hyperkugel  $\mu$  und als „ $\bar{\mu}$ -Kreise“ die Schnittkreise der Hyperkugeln  $\bar{\mu}$  mit der Ebene der Elemente  $f$  und  $\mathfrak{B} f$  (vgl. Corollar 1.1), wo  $\mathfrak{B}$  ein linearer und symmetrischer Operator in einem reellen *Hilbert*-Raum ist, und durchläuft  $f$  sämtliche Elemente des betrachteten *Hilbert*-Raums, dann kommt der Endpunkt von  $\mathfrak{B} f$  jedem Punkt des von den Hyperkreisen  $\mu$  und  $\bar{\mu}$  begrenzten abgeschlossenen Bereichs beliebig nahe. Besitzt der Operator außerdem ein reines Punktspektrum, so kann der Endpunkt von  $\mathfrak{B} f$  mit jedem Punkt dieses abgeschlossenen Bereiches zusammenfallen.

Beim Beweis gehen wir zunächst davon aus, daß dieser Satz dann zutrifft, wenn der Operator  $\mathfrak{B}$  ein reines Punktspektrum mit genau drei Eigenwerten besitzt. Dies läßt sich z. B. durch Umkehrung einer aus der Elastizitätstheorie bekannten elementargeometrischen Konstruktion nachweisen, welche normalerweise zur Bestimmung der Normal- und Tangentialspannung in einer Schnittfläche vorgegebener Orientierung angewendet wird ([78], S. 62; vgl. auch Anhang 3 und die Bemerkung im Anschluß an Corollar 1.3). Ihre Umkehrung kann zur Bestimmung der Lage eines Flächenelements mit vorgegebener Normal- und Tangentialspannung im System der Spannungshauptachsen dienen.

Besitzt nun der Operator ein reines Punktspektrum mit beliebig vielen Eigenwerten, so kann man für jeden vorgegebenen Punkt des von dem Kreissystem begrenzten Gebietes drei verschiedene Eigenwerte derart auswählen, daß sich mit ihnen die oben erwähnte Konstruktion ausführen läßt. Das heißt, daß sich zu jeder vorgegebenen, mit Corollar 1.1 verträglichen relativen Lage von  $f$  und

$\mathfrak{B} f$  drei Eigenwerte derart finden lassen, daß der von den zugehörigen Elementen aufgespannte Unterraum ein Element  $f$  enthält, derart, daß  $f$  und  $\mathfrak{B} f$  gerade den vorgeschriebenen Winkel und das vorgeschriebene Normverhältnis miteinander bilden. Im allgemeinen, d. h. wenn der Endpunkt von  $\mathfrak{B} f$  dem  $\mu$ -Kreis nicht zu nahe liegt, wird dies auf mehrere oder sogar unendlich viele Weisen möglich sein. Damit ist Satz 6 für ein reines Punktspektrum bewiesen.

Enthält das Spektrum von  $\mathfrak{B}$  ein Kontinuum, so hat man zu beachten, daß das Element  $\mathfrak{B} f$  auf keinen Fall gleich dem Element  $\mu f$  werden kann, wenn  $\mu$  zu diesem Kontinuum gehört.  $\mathfrak{B} f$  kann jedoch dem Element  $\mu f$  beliebig nahe kommen, wenn man eine Folge von Elementen

$$f_i = (\epsilon_{\mu + \Delta_i \mu} - \epsilon_{\mu - \Delta_i \mu}) g_i \quad (2.5.70)$$

derart wählt, daß die positiven Zahlen  $\Delta_i \mu$  gegen Null streben, während gleichzeitig die Elemente  $g_i$  stets so groß gewählt werden, daß die Norm aller  $f_i$  oberhalb einer positiven Schranke bleibt. Dementsprechend gelten die Voraussetzungen der obengenannten Konstruktion für ein Kontinuum nicht mehr exakt, sondern nur noch in beliebiger Näherung. Diese elementaren Überlegungen erlauben demnach kein Urteil mehr darüber, mit welchen Punkten des vom  $\mu$ -Kreis und den  $\bar{\mu}$ -Kreisen begrenzten Gebiets der Endpunkt von  $\mathfrak{B} f$  zusammenfallen kann und welchen er nur beliebig nahe zu kommen vermag. Damit ist der Beweis von Satz 6 vollständig. Für die folgenden Überlegungen wichtig ist

**Corollar 6.1:** Die Grenzen des Spektrums eines Operators  $\mathfrak{B}$  sind gleichzeitig die Grenzen des Operators selbst.

Hierbei verstehen wir unter den Grenzen eines symmetrischen Operators die beiden Zahlen ([66], Ziff. 104)

$$m^* = \liminf \mu_f \quad (2.5.71)$$

$$M^* = \limsup \mu_f \quad (2.5.72)$$

wo

$$\mu_f = \frac{\{f, \mathfrak{B} f\}}{\{f, f\}} \quad (2.5.73)$$

der *Rayleigh*-Quotient des Operators  $\mathfrak{B}$  mit dem Element  $f$  ist. Der Beweis folgt sofort durch Anwendung von Satz 6 auf eine Punktfolge, die aus dem Innern des vom  $\mu$ -Kreis und den  $\bar{\mu}$ -Kreisen begrenzten Gebiets gegen den Endpunkt von  $m f$  bzw. von  $M f$  strebt.

## 2.6 Anwendung des Fixpunktsatzes in einem Sonderfall

Wir haben bereits am Ende von § 2.2 bemerkt, daß der Fixpunktsatz für Iterationsverfahren nach *Collatz* [29] für weit allgemeinere Funktionenräume und allgemeinere Operatorentypen gilt als dies im folgenden benötigt wird. In § 2.3 haben wir dann den Funktionenraum auf den reellen *Hilbert*-Raum spezialisiert und in § 2.4–5 noch einen speziellen Operatorentyp in diesem Raum untersucht, nämlich den linearen symmetrischen oder symmetrisierbaren Ope-

rator. Es erwies sich, daß die Eigenschaften dieser Operatoren weitgehend mit den bekannten Eigenschaften endlicher symmetrischer oder symmetrisierbarer Matrizen, oder mit den Eigenschaften symmetrischer Tensoren zweiter Stufe identisch sind; so fanden wir Analogien zum skalaren Produkt eines Vektors mit einer Matrix (einem Tensor) in der Anwendung des Operators auf ein Element des *Hilbert*-Raumes und Analogien zum dyadischen Produkt zweier Vektoren [81] in der symbolischen Darstellung (2.4.21) eines Operators. Wir fanden, daß ein symmetrischer Operator gleich einer symmetrischen Matrix oder einem symmetrischen Tensor ein reelles Spektrum besitzt, auch wenn dies nicht immer aus abzählbar vielen Punkten zu bestehen braucht, und daß auch die allgemeinste Form der Spektraldarstellung (2.4.31–38) noch die wichtigsten Eigenschaften der Hauptachsensysteme bei Matrizen und Tensoren oder der Entwicklung nach Eigenfunktionen bei Operatoren mit reinem Punktspektrum aufweist. So zeigte sich z. B. auch ein Analogon zu den *Mohrschen* Spannungskreisen für die Operatoren des *Hilbert*-Raums im Satz 1 von § 2.5, und ein Analogon zur Addition zueinander orthogonaler symmetrischer Matrizen oder Tensoren in den Sätzen 3 und 4.

Wir wenden nun diese Ergebnisse auf die iterative Lösung der Operatorgleichung

$$\mathfrak{A}[f] = [b] \quad (2.6.1)$$

an. Hier sei  $\mathfrak{A}$  ein linearer und symmetrischer Operator in einem reellen *Hilbert*-Raum,  $[b]$  ein fest vorgegebenes Element dieses *Hilbert*-Raums und  $[f]$  ein gesuchtes Element, welches (2.6.1) erfüllt. Die eckigen Klammern werden wieder im selben Sinne wie in § 1 verwendet; sie markieren ein vorgegebenes oder unbekanntes festes Element, welches im Verlauf der Iteration durch Näherungssummen  $[b]^n$  bzw.  $[f]^n$  angenähert wird (vgl. (1.2.3–4)). Um nun den Fixpunktsatz anwenden zu können, bringen wir (2.6.1) auf die Form (2.2.8)

$$[f] = \mathfrak{Z}[f] \quad (2.6.2)$$

durch Einführung des neuen Operators

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C} - \mathfrak{A} \quad (2.6.3)$$

Dann wird aus (2.6.1)

$$(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})[f] = [b] \quad (2.6.4)$$

oder

$$[f] = [b] + \mathfrak{B}[f] \quad (2.6.5)$$

was der Form (2.6.2) entspricht. Die durch den Operator  $\mathfrak{Z}$  beschriebene Transformation des Elementes  $[f]$  besteht damit in der Anwendung von  $\mathfrak{B}$  und anschließender Addition des festen Elementes  $[b]$ ; der Operator  $\mathfrak{Z}$  ist danach zwar noch symmetrisch, aber wegen der Addition von  $[b]$  nicht mehr linear im Sinne von (2.4.2–3).

Das Iterationsverfahren (2.2.11) geht nun über in

$$[f]^{n+1} = [b] + \mathfrak{B}[f]^n \quad (2.6.6)$$

Definiert man jetzt

$$f^n = [f]^n - [f]^{n-1} \quad (2.6.7)$$

so folgt aus der Definition (2.6.5) des Operators  $\mathfrak{Q}$

$$\mathfrak{Q}[f]^n - \mathfrak{Q}[f]^{n-1} = \mathfrak{B}f^n \quad (2.6.8)$$

Nach (2.2.10) wird also jetzt die *Lipschitz*-Konstante erklärt durch

$$\|\mathfrak{B}f\| \leq K^* \|f\| \quad (2.6.9)$$

Vergleichen wir mit (2.4.4–5), so finden wir, daß die *Lipschitz*-Konstante des Operators  $\mathfrak{Q}$  in unserem Fall identisch ist mit der Norm des Operators

$$K^* = \|\mathfrak{B}\| \quad (2.6.10)$$

Nun vergleichen wir mit den hinreichenden Konvergenzkriterien (2.2.12–14). Das erste ist sicher erfüllt, da  $\mathfrak{Q}$  zugleich mit  $\mathfrak{B}$  eindeutig definiert ist, und dieses haben wir in (2.4.1) vorausgesetzt. Auch das zweite Kriterium, nämlich die Vollständigkeit des Funktionenraums, läßt sich erfüllen, da sich ein *Hilbert*-Raum stets durch Hinzunahme der Grenzelemente aller Folgen abschließen läßt (vgl. den Absatz nach (2.3.18)). Zur vierten Bedingung ist zu bemerken, daß der *Hilbert*-Raum nach (2.3.1–3) ein linearer Raum ist [62], und daß für einen linearen Raum diese Bedingung stets erfüllt ist, wenn nur der Bruch  $K^*/(1 - K^*)$  beschränkt ist. Demnach ist nur noch zu untersuchen, ob  $\mathfrak{Q}$  die dritte Bedingung erfüllt; nach (2.6.10) ist also

$$\|\mathfrak{B}\| < 1 \quad (2.6.11)$$

ein hinreichendes Kriterium dafür, daß das Iterationsverfahren (2.6.6) im Sinne der Konvergenz im Mittel (§ 2.3, Schluß) gegen die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung (2.6.6) bzw. (2.6.1) konvergiert.

Bis hierher haben wir noch keinen Gebrauch von der Symmetrie der Operatoren  $\mathfrak{Q}$  und  $\mathfrak{B}$  gemacht; tatsächlich gelten die Gleichungen (2.6.1–11) auch dann, wenn diese linearen Operatoren unsymmetrisch sind. Eine besondere Eigenschaft der symmetrischen Operatoren ist nun, daß sie in jedem Fall ein Spektrum besitzen, und daß die dem Betrage nach höhere Grenze gleichzeitig die Norm des Operators ist. Sind also  $m$  und  $M$  die untere und die obere Grenze des Spektrums von  $\mathfrak{B}$ , so folgt aus Satz 1, § 2.5

$$\|\mathfrak{B}\| = \max(|m|, |M|) \quad (2.6.12)$$

Damit wird aus (2.6.11) das Konvergenzkriterium

$$\max(|m|, |M|) < 1 \quad (2.6.13)$$

Nun wird das Spektrum eines Operators meist nicht bekannt sein; nach Satz 6, § 2.5 sind jedoch die Grenzen des Spektrums gleichzeitig auch die Grenzen des Operators, und man kann mit (2.5.70–72) die hinreichende Konvergenzbedingung (2.6.13) auch in der Form

$$\limsup |\mu_f| = \limsup \left| \frac{\{f, \mathfrak{B}f\}}{\{f, f\}} \right| < 1 \quad (2.6.14)$$

anschreiben. Diese Form der Konvergenzabschätzung wird sich praktisch am brauchbarsten erweisen; es wird sich herausstellen, daß sich in sehr vielen Fällen entweder eine unterhalb Eins gelegene obere Schranke für diesen Aus-

druck angeben oder wenigstens zeigen läßt, daß eine solche Schranke existieren muß.

Wir haben bisher nicht die Voraussetzung benötigt, daß der lineare Operator  $\mathfrak{B}$  für jeden Iterationsschritt derselbe ist; tatsächlich ist durchaus der Fall denkbar, daß der Operator  $\mathfrak{B}$  von dem Element  $f$  abhängt, auf das er angewandt wird, oder sich nach irgend einer anderen Gesetzmäßigkeit im Laufe der Iteration verändert. Die Konvergenz ist dann immer noch gesichert, wenn zu allen im Verlaufe der Iteration auftretenden Operatoren  $\mathfrak{B}$  eine gemeinsame obere Schranke unterhalb Eins für die in (2.6.11–14) abgeschätzten Größen existiert. Damit gewinnt man die Möglichkeit, an sich nicht-lineare Probleme auf eine Folge linearer Probleme zurückzuführen ([28], S. 307; [83–87]); allerdings mag es hier zuweilen schwierig sein, eine gemeinsame Schranke für alle Operatoren zu finden. Wegen allgemeinerer Sätze über Iteration mit veränderlichen Operatoren vgl. [65].

Ist der Operator  $\mathfrak{B}$  konstant, und wählt man als Ausgangselement in (2.6.6)

$$[f]^0 = f^0 = [b] \quad (2.6.15)$$

so erhält man aus (2.6.6)

$$[f]^n = (\mathfrak{C} + \mathfrak{B} + \mathfrak{B}^2 + \dots + \mathfrak{B}^n) [b] \quad (2.6.16)$$

Falls  $\mathfrak{B}$  einer der Bedingungen (2.6.11, 13, 14) genügt, geht der Ausdruck in der Klammer über in die *Neumannsche Reihe* ([66], Ziff. 104; [40, 41]), wenn  $n$  über alle Grenzen wächst:

$$\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{C} + \mathfrak{B} + \mathfrak{B}^2 + \dots \quad (2.6.17)$$

Wie in (2.4.25) bedeutet hier die  $n$ -te Potenz  $\mathfrak{B}^n$  die  $n$ -malige Anwendung des Operators  $\mathfrak{B}$ . Da nach Satz 5, (2.5.62–63) und (2.6.3) sich die Grenzen  $m$  und  $M$  des Operators  $\mathfrak{B}$  aus den Grenzen  $k$  und  $K$  des Operators  $\mathfrak{A}$  ergeben durch

$$m = 1 - K, \quad M = 1 - k \quad (2.6.18)$$

läßt sich die hinreichende Konvergenzbedingung (2.6.13) auch in der Form

$$0 < k \leq K < 2 \quad (2.6.19)$$

schreiben. Aus dieser Form erkennt man, daß sich die Konvergenz der *Neumannschen Reihe* (2.6.17) für positives  $m$ , also einen eigentlich positiv definiten Operator  $\mathfrak{A}$ , stets erzwingen läßt durch Multiplikation der Gleichung (2.6.1)

mit einer positiven festen Zahl  $\beta < \frac{2}{K}$ ; man erhält

$$\beta \mathfrak{A} [f] = \beta [b] \quad (2.6.20)$$

([66], Ziff. 104). An die Stelle von (2.6.3) tritt jetzt

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{C} - \beta \mathfrak{A} = (1 - \beta) \mathfrak{C} + \beta \mathfrak{B} \quad (2.6.21)$$

Dies entspricht der für Integralgleichungen bekannten Methode von *Wiarda* [130] zur Konvergenzerzwingung. Weitere Verfahren zur Konvergenzerzwin-

gung und -verbesserung ergeben sich für einen eigentlich positiv definiten Operator  $\mathfrak{A}$  aus der Überlegung, daß (2.6.1) die *Eulersche* Gleichung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2} \{[f], \mathfrak{A} [f]\} - \{[f], [b]\} = \min ([f]) \quad (2.6.22)$$

darstellt [31, 62–64, 68, 69]. Wir werden später ausführlich darauf zurückkommen (§ 5).

Die Ergebnisse dieses Paragraphen gelten unverändert auch für symmetrisierbare Operatoren (2.4.42–48), wenn man sie auf den reellen *Hilbert*-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\{f, g\}^* = \{f, \mathfrak{S} g\} \quad (2.6.23)$$

nach (2.4.43) bezieht. Aus dem Variationsproblem (2.6.22) wird dann beispielsweise

$$\frac{1}{2} \{[f], \mathfrak{S} \mathfrak{A} [f]\} - \{[f], \mathfrak{S} [b]\} = \min ([f]) \quad (2.6.24)$$

und aus der zugehörigen *Eulerschen* Gleichung

$$\mathfrak{S} \mathfrak{A} [f] - \mathfrak{S} [b] = 0 \quad (2.6.25)$$

Da aber  $\mathfrak{S}$  gemäß Voraussetzung eigentlich positiv definit ist, kann man  $\mathfrak{S}^{-1}$  auf (2.6.25) anwenden und gelangt damit wieder zu (2.6.1).

### § 3. Der *Hilbert*-Raum der elastischen Zustände (Zustandsraum).

#### Anwendung auf Nichthomogenitäts-Probleme

##### 3.1 Grundbegriffe. Der Zustandsraum

Wir betrachten — im Anschluß an *Prager* und *Synge* [33–35] — einen Funktionenraum, dessen Elemente  $f$  sämtliche physikalisch möglichen elastischen Zustände eines linear elastischen Körpers mit eigentlich positiv definiter elastischer Energie sind, d. h. eines Körpers, der sich nur unter Arbeitsleistung verzerren läßt und diese Arbeit bei Aufhebung der Verzerrung wieder abzugeben vermag, und in dem die Spannungen und Dehnungen linear zusammenhängen (verallgemeinertes *Hookesches* Gesetz). Im übrigen mag der Körper elastisch beliebig anisotrop und nichthomogen sein; an die „Glattheit“ seiner Begrenzung müssen gewisse Anforderungen gestellt werden, auf die wir später zu sprechen kommen, und von den vorkommenden Ortsfunktionen muß man verlangen, daß sämtliche benötigten Ableitungen existieren, oder daß sich an den Unstetigkeitsstellen wenigstens geeignete Ersatzoperationen für die Differentiation erklären lassen (Distributionen [89–91]). Daß man den „Grundkörper“ (s. u.) meist homogen, isotrop und vielleicht sogar mit verschwindender Querkontraktion wählen wird, hat ausschließlich praktische Gründe; wenn die im folgenden zu entwickelnden Iterationsverfahren einen praktischen Sinn haben sollen, darf die Lösung elastischer Probleme im Grundkörper nicht zu schwierig und umständlich sein. Die grundsätzlichen Überlegungen dieses Paragraphen werden jedoch nicht davon betroffen.



Wir unterscheiden im folgenden zwischen dem „Zustand“ einerseits und seinen „Repräsentationen“ oder „Darstellungen“ andererseits. Den elastischen Zustand betrachten wir als ein Element  $f$  eines reellen *Hilbert*-Raums, wobei das „Element“ ein zu den Vektoren des dreidimensionalen *Euklidischen* Raumes analoges Gebilde im unendlich-dimensionalen *Hilbert*-Raum ist, auf das sich die bekannten Rechenregeln für Vektoren im dreidimensionalen Raum weitgehend übertragen lassen (§ 2.3). Sogar eine symbolische Darstellung durch Vektoren im zwei- oder dreidimensionalen *Euklidischen* Raum ist möglich (Abb. 2.1.1–2.5.3).

Unter einer Repräsentation oder Darstellung des Zustandes verstehen wir andererseits eine skalare, vektorielle oder tensorielle Ortsfunktion im physikalischen dreidimensionalen *Euklidischen* Raum, welche den elastischen Zustand  $f$  eindeutig beschreibt und ihrerseits dem elastischen Zustand eindeutig zugeordnet ist. Die einfachste Repräsentation eines elastischen Zustandes ist das ortsabhängige Spannungsfeld

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\mathbf{r}) \quad (3.1.1)$$

wo

$$\mathbf{r} \triangleq x_i \quad (x_1, x_2, x_3 = x, y, z) \quad (3.1.2)$$

der Ortsvektor ist [81, 82, 92]. Der Spannungstensor  $\underline{\sigma}$  läßt sich mathematisch auffassen als Inbegriff seiner neun Komponenten in *Cartesischen* Koordinaten

$$\underline{\sigma} \triangleq \sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ bzw. } x, y, z) \quad (3.1.3)$$

Physikalisch wird der Spannungstensor  $\underline{\sigma}$  in Anlehnung an *Cauchy* definiert als derjenige Tensor, aus dem sich für den nach außen weisenden Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{n} \triangleq n_i \quad (i = 1, 2, 3 \text{ bzw. } x, y, z) \quad (3.1.4)$$

einer beliebig vorgegebenen Schnittfläche der zugehörige Spannungsvektor

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\sigma} \triangleq n_i \sigma_{ij} \equiv (\mathbf{n} \cdot \underline{\sigma})_j \quad (3.1.5)$$

berechnen läßt, d. h. diejenige Kräftebelegung, die auf der Schnittfläche angebracht werden muß, damit der Verzerrungszustand vor dem Schnitt unverändert erhalten bleibt [1-7]. Wir haben (3.1.5) links in der symbolischen Schreibweise nach *Gibbs* und *Lagally* [81, 82], rechts in der Koordinatenschreibweise nach *Dushek* und *Hochrainer* [92] angegeben mit der *Einstein*-schen Summationskonvention, nach der über zweimal im selben Produkt erscheinende Indizes summiert wird [92]. Die symbolische Schreibweise ergibt meist ein kürzeres und übersichtlicheres Formelbild; wir werden sie daher im allgemeinen dort bevorzugen, wo es vor allem auf eine Darstellung der grundlegenden Sachverhalte ankommt; eine Gegenüberstellung beider Schreibweisen findet sich im Anhang. Da wir in Übereinstimmung mit den üblichen Hypothesen der linearen Elastizitätstheorie die Abwesenheit räumlicher Drehmomentendichten [28, 95, 96, 99] voraussetzen, ist der Spannungstensor  $\underline{\sigma}$  symmetrisch, d. h.

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\sigma} = \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (3.1.6)$$

für jedes  $n$  (vgl. die Analogie zu symmetrischen Operatoren (2.4.12) im Hilbert-Raum), oder in Koordinaten

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.1.7)$$

Wir müssen noch erklären, auf welchen elastischen Körper sich der Zustand  $f$  bezieht. Bei *Prager* und *Syngé* [33–35] tritt diese Frage nicht auf, da diese Autoren nur den „Realkörper“  $K^+$  betrachten, d. h. den vorgegebenen elastischen Körper, für den ein elastisches Problem zu lösen ist. Wir werden jedoch hier wie in § 1 neben dem Realkörper  $K^+$  einen „Grundkörper“  $K^\circ$  sowie einen „Differenzkörper“  $K^-$  einführen, müssen also hier ausdrücklich festlegen, daß das Element  $f$  des Zustandsraums stets einen elastischen Zustand des Grundkörpers  $K^\circ$  bedeutet. Der Grundgedanke der hier entwickelten Iterationsverfahren besteht darin, einen Zustand  $[f]$  des Grundkörpers derart zu finden, finden, daß eine seiner Repräsentationen die Lösung des gestellten Problems im Realkörper darstellt. So bedeutet das Element  $[f]^n$  des Zustandsraums für das Iterationsverfahren von § 1.2 den durch die Kräftebelegung  $[R_i]^n$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  erzeugten elastischen Zustand des Grundkörpers  $K^\circ$ . Eine Repräsentation dieses elastischen Zustandes ist das zugehörige Verschiebungsfeld  $[w_i(\mathbf{r})]^n$ . Es wurde in § 1.2 gezeigt, daß dieses Verschiebungsfeld im Falle der Konvergenz gegen ein Verschiebungsfeld  $[w_i(\mathbf{r})]$  strebt, welches gleichzeitig das gesuchte Verschiebungsfeld in der vorgegebenen randbelasteten Scheibe, also dem Realkörper  $K^+$  darstellt. Bei dem Iterationsverfahren von § 1.3 und § 4.6 treten an die Stelle der Kräftebelegungen  $[R_i]^n$  die Versetzungsbelegungen  $[\hat{R}_i]^n$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$ . In diesem Falle wählen wir als Repräsentation von  $[f]^n$  die Ableitungen des Airyschen Spannungsfunktionensfeldes  $[F(\mathbf{r})]^n$ , welches im Falle der Konvergenz gegen  $[F(\mathbf{r})]$  strebt. In § 4.6 wird gezeigt, daß dieses gleichzeitig das gesuchte Spannungsfunktionensfeld ist, welches die dem Rande der vorgelegten Scheibe, also des Realkörpers  $K^+$ , aufgezungenen Verschiebungen in ihrem Innern hervorrufen.

Die elastischen Eigenschaften des Grundkörpers  $K^\circ$ , auf den wir die elastischen Zustände  $f$  stets beziehen, werden beschrieben durch den im allgemeinen Fall ortsabhängigen Tensor 4. Stufe der Elastizitätskoeffizienten

$$\underline{s}^\circ(\mathbf{r}) \triangleq s_{ijkl}^\circ(\mathbf{r}) \quad (3.1.8)$$

oder den dazu inversen Tensor der Elastizitätskonstanten

$$\underline{c}^\circ(\mathbf{r}) \triangleq c_{ijkl}^\circ(\mathbf{r}) \quad (3.1.9)$$

Daß man diese Tensoren für den Grundkörper aus praktischen Gründen meist konstant wählen und auf den Fall der Isotropie spezialisieren wird, haben wir schon bemerkt; für das folgende ist dies jedoch ohne Belang. Mit Hilfe des Tensors der Elastizitätskoeffizienten (3.1.8) läßt sich der Spannung  $\underline{\sigma}$  im Grundkörper  $K^\circ$  eine Dehnung  $\underline{\varepsilon}$  zuordnen nach dem allgemeinen *Hookeschen* Gesetz

$$\underline{\varepsilon} = \underline{s}^\circ \cdot \underline{\sigma} \triangleq \varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^\circ \sigma_{kl} \quad (3.1.10)$$

Wegen der Symmetrie des Dehnungstensors  $\underline{\varepsilon}$  und des Spannungstensors  $\underline{\sigma}$  sowie der vorausgesetzten Existenz einer elastischen Energie besitzt  $\underline{s}^\circ$  die folgenden Symmetrien

$$s_{ijkl}^\circ = s_{klij}^\circ = s_{jikl}^\circ \text{ usw.} \quad (3.1.11)$$

Dieselben Symmetriebeziehungen gelten auch für den Tensor der Elastizitätskonstanten [1, 2, 16, 23, 24, 27, 33–35, 78, 100]. Die Umkehrung von (3.1.10) lautet

$$\underline{\sigma} = \underline{\varepsilon}^\circ \cdots \underline{\varepsilon} \equiv \underline{\varepsilon}^\circ \cdots \underline{\varepsilon}^\circ \cdots \underline{\sigma} \triangleq \sigma_{ij} = c_{ijkl}^\circ \varepsilon_{kl} \equiv c_{ijkl}^\circ s_{klmn}^\circ \sigma_{mn} \quad (3.1.12)$$

Mit (3.1.10) bzw. (3.1.12) haben wir die Dehnung  $\underline{\varepsilon}$  im Anschluß an *Prager* und *Synge* [34] als eine „elastische Dehnung“ eingeführt und nicht als eine aus einem Verschiebungsfeld ableitbare „Gesamtdehnung“ [16, 27, 28, 93–97]. Elastische Dehnung und Gesamtdehnung brauchen keineswegs zusammenzufallen; sie können sich vielmehr noch um eine „plastische“ oder „quasiplastische“ Dehnung unterscheiden. Es ist daher keineswegs notwendig, daß die nach (3.1.10, 12) eingeführte elastische Dehnung die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt [34]. Wir werden darauf an gegebener Stelle noch ausführlicher eingehen (§ 3.3).

Wir sind nunmehr in der Lage, zu erklären, was wir unter dem Skalarprodukt (2.3.1) zweier elastischer Zustände  $f^1$  und  $f^2$  des Grundkörpers  $K^\circ$  im Zustandsraum verstehen wollen, d. h. wir können jetzt dieses Skalarprodukt durch Repräsentationen der beiden Zustände ausdrücken. Und zwar definieren wir mit *Prager* und *Synge* [33–35]

$$\{f^1, f^2\} = \int_{(V_\circ)} \underline{\sigma}^1 \cdots \underline{\varepsilon}^\circ \cdots \underline{\sigma}^2 \, dV = \int_{(V_\circ)} \sigma_{ij}^1 s_{ijkl}^\circ \sigma_{kl}^2 \, dV \quad (3.1.13)$$

wobei  $\underline{\sigma}^1$  und  $\underline{\sigma}^2$  die zu den beiden Zuständen  $f^1$  und  $f^2$  gehörigen Spannungsfelder sind und das Volumenintegral über den ganzen Grundkörper  $K^\circ$  erstreckt wird. Physikalisch bedeutet dieser Ausdruck die Wechselwirkungsenergie der beiden Zustände  $f^1$  und  $f^2$  im Grundkörper  $K^\circ$  [19, 26–28, 33–35, 94–97, 101]. Speziell nennen wir zwei Zustände  $f^1$  und  $f^2$  nach (2.3.7) orthogonal zueinander, wenn diese Wechselwirkungsenergie verschwindet\*).

Man bestätigt leicht die Gültigkeit der Rechenregeln (2.3.1–3); die Vertauschbarkeit (2.3.1) folgt aus der Symmetrie (3.1.11) der Elastizitätskoeffizienten, die Distributivität (2.3.2) sowie die Assoziativität gegenüber einem konstanten Skalarfaktor (2.3.3) aus den bekannten Eigenschaften bestimmter Integrale. Wir haben noch zu prüfen, ob auch die Bedingung (2.3.4) der Positivität des Normquadrats erfüllt ist. Dies ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn die doppelte elastische Energie eines beliebigen elastischen Zustandes  $f$  von  $K^\circ$  mit dem Spannungsfeld  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{x})$

$$\{f, f\} = \int_{(V_\circ)} \underline{\sigma} \cdots \underline{\varepsilon}^\circ \cdots \underline{\sigma} \, dV = \int_{(V_\circ)} \sigma_{ij} s_{ijkl}^\circ \sigma_{kl} \, dV > 0 \quad (3.1.14)$$

also stets positiv ist, solange  $f \neq 0$  gilt, d. h. das Spannungsfeld  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{x})$  nicht überall verschwindet\*\*). Hierfür ist es notwendig und hinreichend, daß für alle

\* ) Vgl. auch ([161], § 9).

\*\* ) Ausnahmen auf einer Punktmenge vom Maß Null können durch ausreichende Stetigkeitsbedingungen ausgeschlossen werden, welchen z. B. innerhalb der Näherung der Kontinuumsstheorie die Spannungsfelder der physikalischen Wirklichkeit immer genügen. Dagegen sind derartige Erscheinungen bei gewissen Näherungsverfahren wohl zu beachten; immerhin beschränken sie sich (z. B. das *Gibbs'sche* Phänomen bei *Fourier-Reihen*) auf meist deutlich erkennbare Unstetigkeiten und ähnliche Ausnahmestellen [29, 40, 41, 62–67, 73]. Wir haben darauf bereits am Schluß von § 2.3 hingewiesen.

$\underline{g} \neq 0$  die Ungleichung

$$\underline{g} \cdot \cdot \underline{g}^\circ \cdot \underline{g} = \sigma_{ij} s_{ijkl}^\circ \sigma_{kl} \geq S \sigma_{ij} \sigma_{ij} \quad (3.1.15)$$

überall in  $K^\circ$  erfüllt wird, wobei  $S$  eine positive Konstante ist. Physikalisch bedeutet der Ausdruck (3.1.15) die doppelte elastische Energiedichte an einer Stelle des Grundkörpers  $K^\circ$ . Falls er dieser Bedingung genügt, nennen wir den Tensor 4. Stufe  $\underline{g}^\circ$  und mit ihm die elastische Energie im Grundkörper  $K^\circ$  „eigentlich positiv definit“ oder auch kurz, wenn kein Mißverständnis möglich ist, „positiv definit“ oder einfach „positiv“. Diese Bedingung ist auch hinreichend für die Existenz des inversen Tensors (3.1.9) der Elastizitätskonstanten (man vergleiche dazu die analogen Verhältnisse für Operatoren im *Hilbert*-Raum nach (2.4.28)).

Wir setzen in dieser Arbeit stets voraus, daß die doppelte elastische Energie (3.1.14) im Grundkörper  $K^\circ$  nur positiv sein kann, wo nicht, wie bei der Untersuchung des *Miche-Weinelschen* Iterationsverfahrens [49], ausdrücklich etwas anderes vereinbart wird. Die Voraussetzung positiv definiter elastischer Energie ist notwendig und hinreichend dafür, daß sämtliche elastischen Zustände  $f$  des Grundkörpers  $K^\circ$  Elemente eines reellen *Hilbert*-Raums darstellen; danach ist z. B. bereits ein inkompressibler Körper als Grundkörper ungeeignet, denn in diesem verschwindet (3.1.14) für einen beliebigen hydrostatischen Druck und die doppelte elastische Energie ist nur noch „positiv semidefinit“ oder „nicht-negativ (definit)“. Das schließt nicht aus, daß ein Iterationsverfahren in einem derartigen Grundkörper trotzdem konvergieren kann; tatsächlich muß das Verfahren von *Miche* und *Weinel* [49] für einen wichtigen Problemkreis konvergieren, wie später (§ 4.5) gezeigt wird. Aber die Argumentation der folgenden Paragraphen ist dann nur noch zulässig, wenn man den *Hilbert*-Raum auf diejenigen Zustände des Grundkörpers einschränkt, für die (3.1.14) erfüllt ist. Alle anderen Zustände, für die die elastische Energie verschwindet oder gar nicht mehr definiert ist, müssen in diesem Fall abgetrennt und besonders untersucht werden.

Die elastische Energie im Grundkörper  $K^\circ$  werden wir also, im Einklang mit den üblichen Voraussetzungen der linearen Elastizitätstheorie, bis auf ausdrücklich gekennzeichnete Ausnahmefälle, stets als eigentlich positiv voraussetzen; und wir werden überdies, wo nicht ausdrücklich anders vermerkt, den Zustandsraum auf Zustände  $f$  des Grundkörpers  $K^\circ$  mit beschränktem Normquadrat (doppelter elastischer Energie) (3.1.14) einschränken. Dadurch werden Singularitäten von der Art einer Einzelkraft [102], einer Einzelversetzung [8, 19, 25–28, 52, 101] und überhaupt aller als Fundamentallösung, *Greensche* Funktion usw. geeigneten elastischen Zustände [1–8, 11, 33, 46, 51, 60, 61, 71] ausgeschlossen. Trotzdem genügt diese Einschränkung nicht, um zu gewährleisten, daß das Spannungsfeld nicht an isolierten singulären Stellen über alle Grenzen wächst; wir begnügen uns hier damit, auf die bekannten Spannungsfelder in der Umgebung von Spitzkerben [9, 10] sowie von Unstetigkeiten gewisser Kräftebelegungen [4] als Beispiele hinzuweisen. Derartige Zustände haben als Grenzfälle physikalisch möglicher elastischer Zustände immer noch eine praktische Bedeutung; für eine rein numerische Rechnung sind sie freilich ungeeignet.

Wir können nun den Inhalt dieser Ziffer in einem einzigen Satz zusammenfassen: Als Elemente  $f$  des Zustandsraums, eines reellen *Hilbert*-Raums, betrachten wir sämtliche möglichen elastischen Zustände beschränkter elastischer Energie in einem Grundkörper  $K^\circ$  mit positiv definiter elastischer Energie und definieren die Wechselwirkungsenergie in  $K^\circ$  als Skalarprodukt.

### 3.2 Ein symmetrischer Operator im Zustandsraum

Nachdem wir in der vorangehenden Ziffer den Zustandsraum als den reellen *Hilbert*-Raum der elastischen Zustände  $f$  eines Grundkörpers  $K^\circ$  eingeführt haben, konstruieren wir nun in diesem Zustandsraum — als einfaches Beispiel — einen speziellen linearen und symmetrischen Operator  $\mathfrak{B}$  (vgl. (2.4.1-3, 9-12)). Wir erklären diesen Operator folgendermaßen:

Es sei  $f^0$  ein beliebiger Zustand des Grundkörpers  $K^\circ$ , repräsentiert durch das Spannungsfeld  $\sigma^0(\mathbf{x})$  und das Dehnungsfeld  $\varepsilon^0(\mathbf{x})$ , welche nach (3.1.10-12) zusammenhängen. Der Zustand

$$f^1 = \mathfrak{B} f^0 \quad (3.2.1)$$

wird nun durch seine Repräsentationen  $\sigma^1(\mathbf{x})$  und  $\varepsilon^1(\mathbf{x})$  definiert. Und zwar erklären wir das Dehnungsfeld  $\varepsilon^1(\mathbf{x})$  mit Hilfe eines Vergleichskörpers  $K'$  mit den Elastizitätskoeffizienten  $s'(\mathbf{x})$  durch

$$\varepsilon^1 = s' \cdot \cdot \sigma^0 \quad (3.2.2)$$

$\varepsilon^1(\mathbf{x})$  ist also diejenige Dehnung, welche das Spannungsfeld  $\sigma^0(\mathbf{x})$  in dem Vergleichskörper  $K'$  hervorruft; auf die Zulässigkeit dieser Festsetzung kommen wir in der nächsten Ziffer zu sprechen. Für den Tensor 4. Stufe  $s'(\mathbf{x})$  des Vergleichskörpers  $K'$  setzen wir wieder die Symmetriebeziehungen (3.1.11) voraus; dagegen verlangen wir nicht, daß er eine positiv definite oder auch nur semidefinite elastische Energie besitzt. Die quadratische Form

$$\sigma \cdot \cdot s' \cdot \cdot \sigma \geq 0 \quad (3.2.3)$$

darf also beliebiges Vorzeichen annehmen können und soll nur nach oben und unten beschränkt sein; wir lassen somit für den Vergleichskörper  $K'$  ein allgemein übliches Postulat der Elastizitätstheorie fallen, halten es aber natürlich für den Grundkörper  $K^\circ$  aufrecht. Das Spannungsfeld  $\sigma^1(\mathbf{x})$  zum Zustand  $f^1$  in (3.2.1) erhalten wir nun nach (3.1.12) zu

$$\sigma^1 = \varepsilon^0 \cdot \cdot \varepsilon^1 = \varepsilon^0 \cdot \cdot s' \cdot \cdot \sigma^0 \quad (3.2.4)$$

Die Linearität dieses Operators  $\mathfrak{B}$  ist nun nach (2.4.2-3) leicht zu verifizieren; zur Prüfung auf Symmetrie benützen wir das Kriterium (2.4.45). Seien also  $\hat{f}^0$  und  $\hat{f}^0$  zwei beliebige Zustände, repräsentiert durch die Spannungsfelder  $\hat{\sigma}^0(\mathbf{x})$  und  $\hat{\sigma}^0(\mathbf{x})$  im Grundkörper  $K^\circ$ . Dann ist, entsprechend der Definition (3.1.13) des Skalarprodukts im Zustandsraum, nach (3.2.1-4)

$$\begin{aligned} \{\hat{f}^0, \mathfrak{B} \hat{f}^0\} &= \{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} = \int_{(V^\circ)} \hat{\sigma}^0 \cdot \cdot \hat{s} \cdot \cdot \hat{\sigma}^1 dV \\ &= \int_{(V^\circ)} \hat{\sigma}^0 \cdot \cdot \hat{s} \cdot \cdot \varepsilon^0 \cdot \cdot s' \cdot \cdot \hat{\sigma}^0 dV = \int_{(V^\circ)} \hat{\sigma}^0 \cdot \cdot s' \cdot \cdot \hat{\sigma}^0 dV \quad (3.2.5) \end{aligned}$$

Ebenso leitet man ab

$$\{\hat{f}^0, \mathfrak{B} \hat{f}^0\} \equiv \{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} = \int_{(V_e)} \hat{\sigma}^0 \dots \underline{s}' \dots \hat{\sigma}^0 dV \quad (3.2.6)$$

und kann nun aus den Symmetrieeigenschaften (3.1.11) des Tensors 4. Stufe  $\underline{s}'$  schließen auf

$$\{\hat{f}^0, \mathfrak{B} \hat{f}^0\} = \{\hat{f}^0, \mathfrak{B} \hat{f}^0\} \quad (3.2.7)$$

für beliebige Zustände  $\hat{f}^0$  und  $\hat{f}^1$ , also auf Symmetrie des durch (3.2.1-4) erklärten Operators  $\mathfrak{B}$ .

Mit Hilfe dieses Operators definieren wir nun eine Iterationsfolge vom Typ (2.6.6)

$$[f]^{n+1} = [f^*] + \mathfrak{B} [f]^n \quad (3.2.8)$$

wo  $f^*$  ein fest vorgegebener Zustand ist. Um zu prüfen, unter welchen Bedingungen diese Iterationsfolge sicher konvergiert, gehen wir von dem Kriterium (2.6.14) aus. Nach (3.1.14) und (3.2.5) ist der *Rayleigh-Quotient* (2.5.73)

$$\mu_f \equiv \frac{\{f, \mathfrak{B} f\}}{\{f, f\}} = \frac{\int_{(V_e)} \underline{\sigma} \dots \underline{s}' \dots \underline{\sigma} dV}{\int_{(V_e)} \underline{\sigma} \dots \underline{s}^\circ \dots \underline{\sigma} dV} \quad (3.2.9)$$

Die Grenzen des Operators  $\mathfrak{B}$  sind also nach Satz 6, § 2.5, (2.5.71-72)

$$m = \liminf \mu_f \geq \liminf \left( \frac{\underline{\sigma} \dots \underline{s}' \dots \underline{\sigma}}{\underline{\sigma} \dots \underline{s}^\circ \dots \underline{\sigma}} \right) \quad (3.2.10)$$

und

$$M = \limsup \mu_f \leq \limsup \left( \frac{\underline{\sigma} \dots \underline{s}' \dots \underline{\sigma}}{\underline{\sigma} \dots \underline{s}^\circ \dots \underline{\sigma}} \right) \quad (3.2.11)$$

wobei man rechts das Gleichheitszeichen setzen kann, wenn  $\underline{s}'(\mathbf{x})$  und  $\underline{s}^\circ(\mathbf{x})$  gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen (s. u.). Mit (2.6.14) folgt daraus das hinreichende Konvergenzkriterium

$$\limsup \left| \frac{\underline{\sigma} \dots \underline{s}' \dots \underline{\sigma}}{\underline{\sigma} \dots \underline{s}^\circ \dots \underline{\sigma}} \right| < 1 \quad (3.2.12)$$

oder unter gewissen, für physikalisch sinnvolle Ortsfunktionen  $\underline{s}'(\mathbf{x})$  und  $\underline{s}^\circ(\mathbf{x})$  stets erfüllten Stetigkeitsbedingungen einfach

$$\max \left| \frac{\underline{\sigma} \dots \underline{s}' \dots \underline{\sigma}}{\underline{\sigma} \dots \underline{s}^\circ \dots \underline{\sigma}} \right| < 1 \quad (3.2.13)$$

wobei  $\underline{\sigma}(\mathbf{x})$  eine frei variable Ortsfunktion ist.

Wir skizzieren noch einen Beweis der — für physikalisch sinnvolle, also stückweise stetige Ortsfunktionen  $\underline{s}'(\mathbf{x})$  und  $\underline{s}^\circ(\mathbf{x})$  an sich evidenten — Abschätzungen (3.2.10-11) für *Riemann-integrale*, feste Ortsfunktionen  $\underline{s}'(\mathbf{x})$  und

$s^\circ(\mathfrak{x})$  sowie die frei variable Ortsfunktion  $\underline{\sigma}(\mathfrak{x})$ . Zur Bestimmung der oberen Grenze bringen wir zunächst den Bruch

$$F(\mathfrak{x}, \underline{\sigma}) = \frac{\underline{\sigma} \cdots \underline{s}' \cdots \underline{\sigma}}{\underline{\sigma} \cdots \underline{s}^\circ \cdots \underline{\sigma}} \quad (3.2.14)$$

durch Variation von  $\underline{\sigma}(\mathfrak{x})$  für jeden Punkt  $\mathfrak{x}$  auf seinen größten Wert; wie in § 3.8 gezeigt wird, ist dies auf die allgemeine Eigenwertaufgabe der Matrizenrechnung zurückzuführen. Dadurch wird ein Spannungsfeld  $\underline{\sigma}^*(\mathfrak{x})$  und eine skalare Funktion

$$F^*(\mathfrak{x}) = \frac{\underline{\sigma}^* \cdots \underline{s}' \cdots \underline{\sigma}^*}{\underline{\sigma}^* \cdots \underline{s}^\circ \cdots \underline{\sigma}^*} \quad (3.2.15)$$

bestimmt, welche ebenfalls *Riemann*-integrierbar ist.

Das Spannungsfeld  $\underline{\sigma}^*(\mathfrak{x})$  ist durch die Maximalforderung nur bis auf einen Skalarfaktor bestimmt; wir können es so normieren, daß  $\underline{\sigma}^* \cdots \underline{s}^\circ \cdots \underline{\sigma}^*$  überall in  $K^\circ$  gleich der Einheit der Energiedichte wird. Multipliziert man jetzt dieses normierte Spannungsfeld mit einer variablen skalaren Ortsfunktion  $\alpha(\mathfrak{x})$ , die außerdem stetig sein soll, so geht (3.2.9) über in

$$\mu_f^* = \frac{\int_{(\tilde{V}_\circ)} \alpha^2 F^* dV}{\int_{(\tilde{V}_\circ)} \alpha^2 dV} \quad (3.2.16)$$

Für das weitere benötigen wir den folgenden Hilfssatz: Für  $n$  Zahlenpaare  $\alpha_i, \beta_i$  mit positiven  $\alpha_i$  und beliebigen  $\beta_i$  gilt

$$\min \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right) \leq \frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \leq \max \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right) \quad (3.2.17)$$

Er folgt durch vollständige Induktion aus

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1}{\alpha_1} &= \frac{\beta_1 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_2}{\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2)} \leq \frac{\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_1}{\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ &= \frac{\beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_2}{\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} \leq \frac{\beta_2 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2}{\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

für

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} \leq \frac{\beta_2}{\alpha_2} \quad (3.2.19)$$

Unterteilen wir nun das Integrationsgebiet in Zähler und Nenner von (3.2.16) in gleicher Weise, und nehmen wir vom Zähler die Obersumme, vom Nenner die Untersumme zu dieser Unterteilung, so muß unter den zugehörigen Näherungswerten für  $\mu_f^*$  bei Variation von  $\alpha(\mathfrak{x})$  eine obere Schranke für  $\mu_f$  nach (3.2.9) enthalten sein, wie man aus der Maximalforderung für  $\underline{\sigma}^*(\mathfrak{x})$  und (3.2.17) ableiten kann. Nun wählt man überall  $\alpha(\mathfrak{x}) = 0$  mit Ausnahme der Intervalle, in denen der Quotient der zugehörigen Glieder beider Näherungssummen am größten ist. Nach (3.2.17) kann dadurch der Bruch aus beiden

Näherungssummen jedenfalls nicht kleiner werden. Falls nun in den restlichen Intervallen  $F^*(\mathbf{x})$  konstant ist, sind wir bereits am Ziel. Andernfalls unterteilt man die Restintervalle weiter und setzt das Verfahren fort. Im ungünstigsten Falle kommt man auf eine Intervallschachtelung, die sich auf die absoluten Maxima von  $F^*(\mathbf{x})$  zusammenzieht oder auf eine Punktfolge, in der  $F^*(\mathbf{x})$  gegen seine obere Grenze konvergiert. Damit ist gezeigt, daß die rechte Seite von (3.2.11) zumindest eine obere Schranke für  $M$  ist. Die Frage ist noch, unter welchen Bedingungen  $\mu_f$  bzw.  $\mu_f^*$  dieser oberen Schranke beliebig nahekommen kann. Das ist sicher dann der Fall, wenn man wenigstens von einem der absoluten Maxima von  $F^*(\mathbf{x})$  ausgehend einen Kreiskegel nicht verschwindender Öffnung mit der Spitze am Ort des Maximums konstruieren kann, derart, daß  $F^*(\mathbf{x})$  in einer gewissen Umgebung der Kegelspitze in und auf dem Kegel stetig ist. Denn dann gibt es eine Intervallschachtelung, für die sich bei jedem Schritt ein *Riemannsches* Integral erklären läßt, für welches beim Fortgang des Verfahrens  $\mu_f^*$  gegen die obere Schranke strebt. Wären dagegen alle absoluten Maxima isolierte Punkte mit isolierten Funktionswerten, oder würde gar nur eine obere Grenze auf einer abzählbaren Folge derartiger Punkte angenähert, so hätte man nur eine obere Schranke für  $\mu_f$ . In der Praxis braucht man derartige Fälle allerdings kaum in Betracht zu ziehen. Der Beweis für (3.2.10) verläuft ganz entsprechend.

Die Iterationsfolge (3.2.8) konvergiert also, wenn (3.2.12) oder (3.2.13) erfüllt ist, gegen die eindeutige Lösung  $[f]$  der Operatorgleichung (vgl. (2.6.5))

$$[f] = [f^*] + \mathfrak{B} [f] \quad (3.2.20)$$

Die Lösung hat in diesem Fall eine recht triviale Bedeutung. Denn schreiben wir (3.2.20) in den Repräsentationen  $[\sigma(\mathbf{x})]$  bzw.  $[\varepsilon^*(\mathbf{x})]$  an, so folgt gemäß (3.2.1–4)

$$\underline{s} \circ \circ [\sigma(\mathbf{x})] = [\varepsilon^*(\mathbf{x})] + \underline{s}' \circ \circ [\sigma(\mathbf{x})] \quad (3.2.21)$$

Führen wir nun einen zweiten Vergleichskörper  $K''$  ein mit den Elastizitätskoeffizienten

$$\underline{s}'' = \underline{s}^\circ - \underline{s}' \quad (3.2.22)$$

so geht (3.2.21) über in

$$\underline{s}'' \circ \circ [\sigma(\mathbf{x})] = [\varepsilon^*(\mathbf{x})] \quad (3.2.23)$$

Das heißt, man erhält als Lösung die der vorgegebenen elastischen Dehnung  $[\varepsilon^*(\mathbf{x})]$  nach dem *Hookeschen* Gesetz im zweiten Vergleichskörper  $K''$  zugehörige Spannung  $[\sigma(\mathbf{x})]$ , ein Ergebnis, das man natürlich auch auf einfacherem Wege gewinnen kann. Der unter dieser Ziffer eingeführte Operator hat also keine praktische Bedeutung und sollte nur als einfaches Beispiel dienen; überdies haben wir hierbei einige im folgenden nützliche Beziehungen abgeleitet. Wir merken noch an, daß der Vergleichskörper  $K''$  bei Erfüllung von (3.2.12) eine positive elastische Energie besitzt und damit als ein „Realkörper“ aufgefaßt werden kann.

### 3.3 Die Grundaufgaben der Elastizitätstheorie

Die in § 3.1 im Anschluß an *Prager* und *Synge* [33–35] eingeführten allgemeinen Spannungsfelder brauchen keineswegs Lösungen eines Randwertproblems der



Elastizitätstheorie zu sein. Weder brauchen sie den Gleichgewichtsbedingungen zu genügen, noch wird von dem zugehörigen Dehnungsfeld die Erfüllung der Kompatibilitätsbedingungen verlangt. Einzige Voraussetzung ist die Existenz der benötigten Ableitungen oder, an Unstetigkeitsstellen, wenigstens der entsprechenden Distributionen, so weit diese mit einer beschränkten elastischen Energie verträglich sind. Der bekannte *Kirchhoffsche* Eindeutigkeitsbeweis [1, 2, 78, 93, 98] läßt sich auf derart allgemeine Spannungsfelder nicht ohne weiteres anwenden; tatsächlich gilt er in seiner speziellen Form nur, wenn sich die Dehnung überall aus einer Verschiebung ableiten läßt, im Innern weder Kräfte noch Momente angreifen und an der Oberfläche gewisse Randbedingungen für Kräfte und Verschiebungen vorgeschrieben sind. Daneben werden außer der positiven Definitheit der elastischen Energie gewisse Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften für die Elastizitätskoeffizienten und die Oberfläche des Körpers vorausgesetzt; bei physikalisch sinnvollen Problemen kann man jedoch normalerweise damit rechnen, daß diese Bedingungen erfüllt sind. Der Eindeutigkeitsbeweis läßt sich unschwer erweitern auf den Fall, daß im Innern ein fest vorgegebenes Kräftesystem angreift [1, 2, 78] oder fest vorgegebene Eigenspannungsquellen verteilt sind [27, 102]; er bricht dagegen sofort zusammen, wenn man eine dieser Größen zur freien Variation zuläßt. Insbesondere läßt sich zu jedem beliebigen Spannungsfeld im Grundkörper  $K^\circ$  ein System von Kräften und Eigenspannungsquellen finden, welches gerade die vorgegebene Spannung hervorruft. Es läßt sich also über eine rein formale Auffassung hinaus auch als Lösung eines allgemeinen elastizitätstheoretischen Problems interpretieren. Der Verdeutlichung dieser Tatsache dient der folgende kurze Abriss über die Grundprobleme der Elastizitätstheorie.

Da es hier nur auf die grundlegenden Zusammenhänge und nicht auf Einzelheiten der Rechnung ankommt, verwenden wir wieder die symbolische Schreibweise [81, 82], die wir durch Vergleich mit der Indizes-Schreibweise [92] einführen und durch einige weitere häufig gebrauchte Differentiationssymbole [27] ergänzen (vgl. auch Anhang). Zunächst definieren wir ein vektorielles Differentiationssymbol, den „Nabla-Vektor“ durch

$$\nabla \triangleq \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3 \text{ bzw. } x, y, z) \quad (3.3.1)$$

Die Stellung des Nabla-Vektors in einem Produkt ist — im Gegensatz zur Indizes-Schreibweise — durch die Regeln der Vektorrechnung festgelegt; wir müssen daher vereinbaren, daß  $\nabla$  nach vorwärts und rückwärts jeden Faktor eines Produkts differenziert, sofern nicht übergeordnete Klammern oder Pfeile eine Ausnahme ausdrücklich kennzeichnen [27, 98]. So ist z. B. der symmetrische Teil des Gradiententensors, der „Deformator“ eines Vektors [27, 98]

$$\text{Def } \mathbf{w} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \nabla) \triangleq \frac{1}{2} (\partial_i w_j + \partial_j w_i). \quad (3.3.2)$$

Als ein Skalarprodukt (genauer: ein einfach-skalares Produkt) des  $\nabla$ -Vektors mit einem Tensor ist definiert der „Divergenzvektor“

$$\text{Div } \underline{g} = \nabla \cdot \underline{g} \triangleq \partial_i \sigma_{ij} = (\nabla \cdot \underline{g})_j \quad (3.3.3)$$

und entsprechend bei Anwendung auf einen Vektor der Skalar

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \nabla \cdot \mathbf{w} = \partial_i w_i \quad (3.3.4)$$

als die „Divergenz“ des Vektorfeldes.

Um den Rotor eines Vektors in der Indizes-Schreibweise auszudrücken, verwenden wir einen speziellen Tensor 3. Stufe, den *Levi-Civita*-Tensor [92]

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{für } ijk = 213, 321, 132 \\ 0, & \text{wenn zwei Indizes gleich sind} \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Damit wird

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{w} \triangleq \epsilon_{ijk} \partial_j w_k \quad (3.3.6)$$

Schließlich benötigen wir noch die „Inkompatibilität“ eines Tensors [27, 98]

$$\operatorname{Ink} \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla \triangleq -\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \partial_k \partial_m \varepsilon_{ln} \quad (3.3.7)$$

als den tensoriellen Differentialausdruck, dessen Komponenten in den Kompatibilitätsbedingungen von *De St. Venant* [1, 2, 5, 78, 100] auftreten. Es gelten die Identitäten

$$\operatorname{Ink} \operatorname{Def} \mathbf{w} = \frac{1}{2} \nabla \times (\nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \nabla) \times \nabla = 0 \triangleq -\frac{1}{2} \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \partial_k \partial_m (\partial_l w_n + \partial_n w_l) = 0 \quad (3.3.8)$$

$$\operatorname{Def} (\mathbf{w}_0 + \mathbf{o} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) = 0 \quad (\mathbf{w}_0, \mathbf{o}, \mathbf{r}_0 \text{ feste Vektoren}) \quad (3.3.9)$$

$$\operatorname{Div} \operatorname{Ink} \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla) = 0 \triangleq -\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \partial_i \partial_k \partial_m \varepsilon_{ln} = 0 \quad (3.3.10)$$

(*Bianchi*-Identität). Wir formulieren nun die wichtigsten Grundprobleme der Elastizitätstheorie.

**3.3.A. Die Randwertaufgabe.** Hier ist das Spannungsfeld in einem elastischen Körper zu ermitteln, in dessen Innern weder Kräfte angreifen noch Eigenspannungsquellen verteilt sind, dessen elastischer Zustand also allein durch die von außen kommenden Einwirkungen auf seine Oberfläche bestimmt wird. Demnach hat in seinem Innern das Spannungsfeld  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$  die homogene Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (3.3.11)$$

und das Dehnungsfeld  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})$  die homogene Kompatibilitätsbedingung

$$\operatorname{Ink} \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (3.3.12)$$

zu erfüllen. Spannungs- und Dehnungsfeld müssen außerdem nach dem *Hookeschen* Gesetz (3.1.10–12)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underline{\underline{g}} \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\sigma} = \underline{\underline{g}} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.3.13)$$

zusammenhängen. Auf der Oberfläche können etwa die Verschiebungen vor-

geschrieben sein (erste Randwertaufgabe), oder es ist eine Kräftebelegung vorgegeben (zweite Randwertaufgabe). Die zweite Randwertaufgabe ist ein sogenanntes Lastspannungsproblem; die erste Randwertaufgabe kann als ein Eigenspannungsproblem aufgefaßt werden, wenn man den elastischen Körper in eine starre Umgebung einbettet und in der Grenzfläche eine Versetzungsbelegung anbringt ([27], S. 45). Auch Kombinationen von Zwangsbedingungen für die Verschiebung, von Kräftebelegungen und von elastischen Einbettungen sind möglich, allerdings nicht in völlig beliebiger Weise. Der Eindeutigkeitsbeweis nach *Kirchhoff* bietet bei positiv definiter elastischer Energie meist keine besonderen Schwierigkeiten und läßt sich in gewissen Sonderfällen [103] sogar auf indefinite Energie ausweiten. Der Beweis verläuft indirekt; man nimmt zunächst zwei verschiedene Spannungsfelder mit denselben Randbedingungen an und betrachtet ihre Differenz. Sind nun die Randbedingungen so beschaffen, daß dieses Differenzspannungsfeld stets verschwindende Arbeit der äußeren Kräfte an dem betrachteten Körper ergibt, so schließt man weiter auf verschwindende Energie des Differenzspannungsfeldes und von da aus über die Definitheitsbeziehungen auf das Verschwinden des Spannungsfeldes selber. Wesentlich schwieriger als die Eindeutigkeitsbeweise sind die Existenzbeweise zu führen; sie hängen in noch stärkerem Maße als der Eindeutigkeitsbeweis von den Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften, einerseits der elastischen Konstanten und der Oberfläche, andererseits der zugelassenen Spannungsfelder ab.

Theoretisch am einfachsten ist die mathematische Formulierung der Randwertaufgabe als Randwertproblem für ein System partieller Differentialgleichungen; es kommen dafür hauptsächlich zwei Wege in Frage. Bei der Methode der Verschiebungsfunktionen erfüllt man die Kompatibilitätsbedingung (3.3.12) nach (3.3.8) identisch durch den Ansatz

$$\varepsilon = \text{Def } \mathfrak{w} \quad (3.3.14)$$

und geht damit über das *Hookesche* Gesetz (3.3.13) in die Gleichgewichtsbedingung (3.3.11) ein. So erhält man die verallgemeinerten *Navierschen* Gleichungen

$$\text{Div } (\zeta \cdot \cdot \text{Def } \mathfrak{w}) = 0 \quad (3.3.15)$$

für die Verschiebungen. Bei der Methode der Spannungsfunktionen erfüllt man die Gleichgewichtsbedingungen (3.3.11) nach (3.3.10) identisch durch den *Beltramischen* Ansatz [104, 114]

$$\sigma = \text{Ink } \chi \quad (3.3.16)$$

wo  $\chi$  der symmetrische Spannungsfunktionentensor ist, und geht damit über das *Hookesche* Gesetz (3.3.13) in die Kompatibilitätsbedingung (3.3.12) ein. So erhält man die verallgemeinerten *Beltramischen* Gleichungen in Spannungsfunktionen

$$\text{Ink } (\zeta \cdot \cdot \text{Ink } \chi) = 0 \quad (3.3.17)$$

Dazu kommen die Randbedingungen; im Falle der zweiten Randwertaufgabe lauten sie

$$\mathfrak{n} \cdot \sigma = \mathfrak{P} \quad (3.3.18)$$

wo  $\mathfrak{P}$  die vorgegebene Kräftebelegung an der Oberfläche ist. Die Oberflächenkräfte müssen ein Gleichgewichtssystem bilden, wenn eine Lösung existieren soll.

Das gesuchte Spannungsfeld ist, falls es existiert, eindeutig bestimmt, die Verschiebung dagegen bei der zweiten Randwertaufgabe nach (3.3.9) nur bis auf eine starre Bewegung, und der Spannungsfunktionentensor nach (3.3.8) für beliebige zulässige Randbedingungen nur bis auf einen Deformator. Dies erlaubt in wichtigen Sonderfällen Spezialisierungen des allgemeinen *Beltrami*-schen Ansatzes (3.3.16) (*Airysche*, *Maxwellsche*, *Morerasche*, *Blochsche*, *Krüner-Marguerresche*, *Schaeferische* Spannungsfunktionen), die die in ihrer allgemeinen Form sehr unhandlichen Gleichungen (3.3.17) auf eine für die Anwendungen brauchbare Form vereinfachen [1–10, 27, 28, 43, 46, 59–61, 78, 98, 100, 105, 106]. Andere, praktisch oft wirksamere Verfahren zur Lösung des Problems (3.3.1–3) gehen von Variationsprinzipien und Integralgleichungssystemen aus [31–37, 45, 48, 71, 109, 110 und einige bereits zitierte Arbeiten]. Auf die besonderen Verhältnisse in mehrfach zusammenhängenden [1–8, 27, 28, 59, 61, 98, 107] und mehrfach begrenzten [98] Körpern wollen wir hier nicht eingehen; eine zusammenfassende Untersuchung dieser Fragen wurde vom Verfasser an anderer Stelle gegeben [98].

**3.3.B. Das Summationsproblem für Lastspannungen.** Greifen im Inneren eines elastischen Körpers („äußere“, d. h. wie etwa die Schwerkraft nicht durch das Material des Körpers selbst weitergeleitete) Kräfte mit der auf das Volumen bezogenen Dichte  $\mathfrak{p}$  an, so tritt an Stelle von (3.3.11) die inhomogene Gleichgewichtsbedingung

$$\text{Div } \mathfrak{g} = - \mathfrak{p} \quad (3.3.19)$$

Setzt man gleichzeitig voraus, daß im Innern des Körpers keine Eigenspannungsquellen verteilt sind, so gilt weiter (3.3.12). Das Summationsproblem besteht nun darin, ein Spannungsfeld zu finden, welches gleichzeitig (3.3.19, 12, 13) erfüllt, zunächst ohne Rücksicht auf irgendwelche Randbedingungen. Geht man mit dem Ansatz (3.3.14) über (3.3.13) in (3.3.19) ein, so erhält man die inhomogenen verallgemeinerten *Navierschen* Gleichungen

$$\text{Div } (\mathfrak{e} \cdot \cdot \text{Def } \mathfrak{w}) = - \mathfrak{p} \quad (3.3.20)$$

Ohne Randbedingungen ist die Lösung dieser Aufgabe keineswegs eindeutig; praktisch sucht man zunächst eine möglichst einfache Partikularlösung zu finden, z. B. durch Probieren. Eine im Unendlichen abklingende Lösung erhält man durch Quadratur mit Hilfe der Fundamentallösung; man „summiert“ dann die Spannungsfelder aller angreifenden Kräfte [1, 2, 27, 33, 37, 46, 48, 51, 60, 78]. Anschaulich gesprochen denkt man sich den gegebenen Körper in ein unendliches elastisches Medium eingebettet und rechnet das Spannungsfeld des Verbundkörpers aus. Die Randbedingungen werden nachträglich berücksichtigt, indem man den Körper wieder aus dem unendlichen Medium herausgeschnitten denkt und auf seiner Oberfläche Zusatzkräfte derart anbringt, daß die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt werden. Anschließend wird das Spannungsfeld für das derart bestimmte Randwertproblem berechnet und

zu dem ursprünglichen Spannungsfeld im unendlichen Medium addiert, was wegen der Linearität der Differentialgleichungen erlaubt ist (Superpositionsprinzip). Das Spannungsfeld, welches gleichzeitig die Summations- und die Randwertaufgabe löst, ist eindeutig bestimmt; eine Lösung kann jedoch nur existieren, wenn Volumen- und Oberflächenkräfte zusammen ein Gleichgewichtssystem bilden. Auch die gleichzeitige Lösung von Randwert- und Summationsproblem ist in vielen Fällen zumindest prinzipiell möglich [1, 2, 11, 37, 43, 46, 78]; und die bekannten Variationsprinzipien lassen sich ohne Schwierigkeit auf den Fall der Anwesenheit von Volumenkräften erweitern [l. c.].

**3.3.C.** Das Summationsproblem für Eigenspannungen. Wir setzen jetzt voraus, daß weder im Innern noch an der Oberfläche des elastischen Körpers Kräfte angreifen, schreiben also im Innern (3.3.11) vor und an der Oberfläche

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\sigma} = 0, \quad (3.3.21)$$

Dagegen lassen wir im Innern Eigenspannungsquellen zu, setzen also an die Stelle von (3.3.12) die inhomogene Kompatibilitätsbedingung

$$\text{Ink } \underline{\varepsilon} = \underline{\eta} \quad (3.3.22)$$

und untersuchen jetzt die Kombination des Summationsproblems (3.3.11, 13, 22) mit dem Randwertproblem (3.3.21). Hierbei ist  $\underline{\eta}(\mathbf{x})$  ein symmetrischer Tensor, dessen physikalische Bedeutung wir sogleich angeben. Die durch (3.3.13) erklärte „elastische“ Dehnung erfüllt also die homogenen Kompatibilitätsbedingungen nicht mehr, und der Ansatz (3.3.14) scheidet aus. Wir können jedoch (3.3.11) identisch erfüllen durch den Ansatz (3.3.16). Gehen wir damit über (3.3.13) in (3.3.22) ein, so erhalten wir die inhomogenen verallgemeinerten *Beltramischen* Gleichungen in Spannungsfunktionen [27]

$$\text{Ink } (\underline{g} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}) = \underline{\eta} \quad (3.3.23)$$

Das Summationsproblem für Eigenspannungen besteht nun wieder darin, zu (3.3.23) eine — nach Möglichkeit einfache — Partikularlösung ohne Rücksicht auf die Randbedingungen zu finden. Auch gibt es für die Spannungsfunktionen den Fundamentallösungen für die Verschiebungen analoge Lösungen [27, 108]; nur hat man hier die mit der *Bianchischen* Identität (3.3.10) verbundenen Einschränkungen des „Inkompatibilitätsfeldes“  $\underline{\eta}(\mathbf{x})$  besonders zu beachten. Für das anschließende Randwertproblem werden die Zusatzkräfte so bestimmt, daß insgesamt (3.3.21) erfüllt wird ([27], § 15); wir spezialisieren uns also hier bei Eigenspannungsproblemen der Einfachheit wegen auf eine freie, unbelastete Oberfläche. Damit ist das Spannungsfeld eindeutig bestimmt; die Existenz einer Lösung ist nachgewiesen, wenn die Existenz einer Partikularlösung von (3.3.23) sowie die Lösbarkeit der zweiten Randwertaufgabe gesichert ist.

Wir kommen nun auf die Bedeutung der rechten Seite von (3.3.22). Da die elastische Dehnung

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^E = \underline{g} \cdot \underline{\sigma} = \underline{g} \cdot \text{Ink } \underline{\chi} \quad (3.3.24)$$

nicht mehr die homogene Kompatibilitätsbedingung (3.3.12) erfüllt, andererseits aber jedes Volumenelement des elastischen Körpers eine (ggf. verschwindende) Verschiebung erfahren muß, ist es jetzt nicht mehr erlaubt, von der Dehnung schlechthin zu sprechen. Wir führen als Ursache der Eigenspannungen eine von plastischer Verformung, Wärmedehnung, elektrischen und magnetischen Vorgängen, Umwandlungsprozessen usw. herrührende „plastische“ oder „quasi-plastische“ vorgegebene „Extradehnung“  $\varepsilon^Q$  ein, und außerdem die neben der Spannung  $\sigma$  gesuchte „Gesamtdehnung“

$$\varepsilon^G = \text{Def } w \quad (3.3.25)$$

welche sich zusammensetzt aus der elastischen Dehnung und der Extradehnung [16, 19, 27, 28, 93–98, 111, 129] nach

$$\varepsilon^G = \varepsilon^E + \varepsilon^Q \quad (3.3.26)$$

Für die Gesamtdehnung gilt nach (3.3.25) wieder die homogene Kompatibilitätsbedingung (3.3.12); demnach ist mit (3.3.26)

$$\text{Ink } \varepsilon^E + \text{Ink } \varepsilon^Q = 0. \quad (3.3.27)$$

Setzt man

$$\eta = - \text{Ink } \varepsilon^Q \quad (3.3.28)$$

so folgt wieder (3.3.22). Aus der Lösung des Randwert- und Summationsproblems für  $\chi$  erhält man mit (3.3.24, 26) die Gesamtdehnung

$$\varepsilon^G = \varepsilon^Q + \underline{s} \cdot \text{Ink } \chi \quad (3.3.29)$$

Ein aus einer „plastischen oder quasi-plastischen Verschiebung“ ableitbarer Deformatoranteil der Extradehnung trägt wohl zur Verschiebung, nicht aber zur Spannung bei.

Fundamentallösungen, die zur Aufstellung einer Partikularlösung von (3.3.23) durch Quadratur geeignet sind, kann man aus der Theorie der Versetzungen und anderer singulärer Eigenspannungsquellen gewinnen [19, 26–28, 52, 53, 101, 108]; auch die Möglichkeit gleichzeitiger Lösung von Randwert- und Summationsaufgabe durch Quadratur kann gegeben sein [8, 11]. Hinweise auf Variationsprinzipien finden sich in [27, 109].

**3.3.D.** Das allgemeine Randwert- und Summationsproblem. Im allgemeinen Fall können im Innern des elastischen Körpers sowohl Kräfte als auch Eigenspannungsquellen vorgegeben sein; sowohl die Gleichgewichts- als auch die Kompatibilitätsbedingung gelten dann nur in ihrer inhomogenen Form (3.3.19) und (3.3.22). Da die Differentialgleichungen (3.3.20, 23) linear sind, können die Lösungen der Summationsprobleme 3.3.B und 3.3.C superponiert werden, und man erhält die Lösung des gesamten Summationsproblems durch Addition der Lösungen von (3.3.20) und (3.3.23) in der Form

$$\sigma = \sigma^G = \underline{c} \cdot \text{Def } w + \text{Ink } \chi \quad (3.3.30)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^E = \text{Def } w + \underline{s} \cdot \text{Ink } \chi \quad (3.3.31)$$

$$\text{Def } w^* = \varepsilon^G = \text{Def } w + \underline{s} \cdot \text{Ink } \chi + \varepsilon^Q \quad (3.3.32)$$

Das Randwertproblem kann für den Lastspannungs- und den Eigenspannungsanteil gemeinsam gelöst werden; die Randbedingungen setzen sich zusammen aus den vorgegebenen Randwerten und den Korrekturen, welche durch die Nichtbeachtung der Randbedingungen in den Partikularlösungen (3.3.30–32) erforderlich werden. Entsprechend den beiden Lösungsmethoden (3.3.15) und (3.3.17) kann dabei die Lösung des Randwertproblems nach Belieben der Verschiebung  $\mathbf{w}$  oder dem Spannungsfunktionentensor  $\underline{\chi}$  zugeschlagen werden. Der Einfachheit halber werden wir uns im folgenden auf die zweite Randwertaufgabe (Oberflächenkräfte gegeben) und die Randbedingung (3.3.21) für den Eigenspannungsanteil des Problems beschränken, also stets

$$\mathbf{n} \cdot \text{Ink } \underline{\chi} = 0 \quad (3.3.33)$$

voraussetzen.

Nun erscheint die Form (3.3.30–32) für die Lösung der allgemeinen Randwert- und Summationsaufgabe durch ihre Trennung von Last- und Eigenspannungsanteil zwar sehr übersichtlich; für die praktische Rechnung ist sie aber meist recht unzuweckmäßig, denn sie erfordert jeweils die Lösung einer Gleichung sowohl der Form (3.3.20) als auch der Form (3.3.23). Wir zeigen nun, daß man das allgemeine Problem auch auf die Lösung einer dieser Gleichungen allein zurückführen kann; die Wahl zwischen der Verschiebungs- und der Spannungsfunktionenmethode kann man dann nach reinen Zweckmäßigkeitsgründen treffen.

Um das Eigenspannungsproblem auf Verschiebungsfunktionen umzuschreiben, führen wir ein die zugehörige „dehnungswirksame Spannung“

$$\underline{\sigma}^{DQ} = \underline{c} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^{GQ} \quad (3.3.34)$$

wo

$$\underline{\varepsilon}^{GQ} = \text{Def } \mathbf{w}^Q = \underline{\varepsilon}^Q + \underline{\varepsilon}^{EQ} \quad (3.3.35)$$

derjenige Teil der Gesamtdehnung ist, welcher durch die Extradehnung  $\underline{\varepsilon}^Q$  allein hervorgerufen wird, und weiter die „Extraspannung“

$$\underline{\sigma}^Q = - \underline{c} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^Q \quad (3.3.36)$$

wo  $\underline{\varepsilon}^Q$  die plastische oder quasiplastische Extradehnung in (3.3.26) ist. Der Beitrag  $\underline{\sigma}^{GQ}$  der Eigenspannungsquellen zur Gesamtspannung  $\underline{\sigma}^G$  setzt sich dann zusammen aus dem Beitrag zur dehnungswirksamen Spannung und der Extraspannung:

$$\underline{\sigma}^G = \underline{\sigma}^{DQ} + \underline{\sigma}^Q \quad (3.3.37)$$

Einsetzen von (3.3.34–37) in die homogene Gleichgewichtsbedingung (3.3.11) liefert dann für  $\mathbf{w}^Q$  eine vektorielle Differentialgleichung der Form (3.3.20)

$$\text{Div } (\underline{c} \cdot \cdot \text{Def } \mathbf{w}^Q) = - \mathbf{p}^Q \quad (3.3.38)$$

mit den „Quasi-Kräften“ [27] oder „inneren Kräften“ [16, 95]

$$\mathbf{p}^Q = \text{Div } \underline{\sigma}^Q = - \text{Div } (\underline{c} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^Q) \quad (3.3.39)$$

Es läßt sich ohne Schwierigkeiten zeigen, daß die aus der Lösung von (3.3.38)

abgeleitete Gesamtdehnung (3.3.35) mit (3.3.29) übereinstimmt [16, 93–95]. Zur Lösung von Wärmespannungsproblemen wird diese Methode gewöhnlich bevorzugt [112, 113].

Die Lösung des allgemeinen Problems mit Verschiebungsfunktionen nimmt dann die folgende Gestalt an. Man bestimmt eine Gesamtverschiebung  $w^*$  aus

$$\text{Div}(\underline{c} \cdot \text{Def } w^*) = -p^* \quad (3.3.40)$$

mit der rechten Seite

$$p^* = p + p^Q \quad (3.3.41)$$

Die Lösungen (3.3.30–32) erscheinen jetzt in der Form

$$\underline{\sigma}^G = \underline{c} \cdot \text{Def } w^* + \underline{\sigma}^Q = \underline{c} \cdot \text{Def } w^* - \underline{c} \cdot \underline{\varepsilon}^Q \quad (3.3.42)$$

$$\underline{\varepsilon}^E = \text{Def } w^* - \underline{\varepsilon}^Q \quad (3.3.43)$$

$$\underline{\varepsilon}^G = \text{Def } w^* \quad (3.3.44)$$

Für die Randbedingungen (3.3.18) der zweiten Randwertaufgabe erhält man jetzt

$$n \cdot \underline{\sigma}^G = \mathfrak{P} \quad (3.3.45)$$

wo  $\mathfrak{P}(\underline{x})$  die vorgegebene Kräftebelegung auf der Oberfläche ist\*).

Will man dagegen das Summationsproblem 3.3.B für Lastspannungen gleichzeitig mit dem Problem 3.3.C für Eigenspannungen nach der Spannungsfunktionenmethode lösen, so führt man eine „fiktive Extraspannung“  $\underline{\sigma}^K(\underline{x})$  ein, welche die Bedingung

$$\text{Div } \underline{\sigma}^K = p \quad (3.3.46)$$

erfüllt, sonst aber völlig beliebig ist. Auch Randbedingungen braucht man für  $\underline{\sigma}^K$  im vorliegenden Fall nicht vorzuschreiben, da diese nachträglich berücksichtigt werden. Ein derartiges Spannungsfeld ist meist leicht zu finden; falls die Volumenkräfte ein Potential haben und dieses bekannt ist, erhält man die fiktive Extraspannung sogar ohne jede Integration [114]. Diese fiktive Extraspannung wird nun genau so wie eine wirkliche Extraspannung behandelt; man berechnet also für die Spannungsfunktionenmethode daraus durch Umkehrung von (3.3.36) die zugehörige fiktive Extradehnung

$$\underline{\varepsilon}^K = -\underline{g} \cdot \underline{\sigma}^K \quad (3.3.47)$$

und rechnet damit wie in (3.3.23, 28) weiter. Insgesamt erhält man für den Spannungsfunktorentensor  $\underline{\chi}^*(\underline{x})$  des allgemeinen Problems die tensorielle Differentialgleichung vom Typ (3.3.23)

$$\text{Ink}(\underline{g} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^*) = \underline{\eta}^* \quad (3.3.48)$$

---

\*) Eine andere Form der Randbedingungen

$$n \cdot (\underline{c} \cdot \text{Def } w^*) = \mathfrak{P} + \mathfrak{P}^Q \quad (3.3.45a)$$

erhält man nach (3.3.42) durch Einführung der Quasi-Oberflächenkraftdichte

$$\mathfrak{P}^Q = -n \cdot \underline{\sigma}^Q \quad (3.3.45b)$$



wo

$$\eta^* = \eta + \text{Ink } (\underline{s} \cdot \underline{\sigma}^K) \quad (3.3.49)$$

ist und  $\eta$  nach (3.3.28) aus der wirklichen Extradehnung  $\varepsilon^Q$  bestimmt wird. Die Lösungen (3.3.30–32) erscheinen nun in der Form

$$\underline{\sigma}^G = \text{Ink } \underline{\chi}^* - \underline{\sigma}^K \quad (3.3.50)$$

$$\underline{\varepsilon}^E = \underline{s} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^* - \underline{s} \cdot \underline{\sigma}^K = \underline{s} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^* + \underline{\varepsilon}^K \quad (3.3.51)$$

$$\underline{\varepsilon}^G = \underline{s} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^* + \underline{\varepsilon}^K + \underline{\varepsilon}^Q \quad (3.3.52)$$

Für die Randbedingungen ist im Falle der freien, belasteten Oberfläche (zweite Randwertaufgabe) wieder (3.3.45) einzusetzen, und es gilt wieder wie unter 3.3.B, daß eine Lösung nur dann existieren kann, wenn die Volumen- und Oberflächenkräfte zusammen ein Gleichgewichtssystem bilden. Wegen der Besonderheiten mehrfach zusammenhängender und mehrfach begrenzter Körper sei auf [98] verwiesen\*). Als praktisch wichtigstes Ergebnis halten wir fest, daß die Lösungsverfahren für Last- und Eigenspannungsprobleme untereinander austauschbar sind, und daß man sich demnach aus der großen Zahl der bekannten Methoden jeweils die zweckmäßigste auswählen kann.

**3.3.E. Das inverse Problem und der Zerlegungssatz.** Als inverses Problem der Elastizitätstheorie bezeichnen wir die Aufgabe, zu einem beliebig vorgegebenen Spannungsfeld  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  in einem elastischen Körper mit den Elastizitätskoeffizienten  $\underline{s}(\underline{x})$  dasjenige System von Volumenkräften  $\underline{p}(\underline{x})$ , von Oberflächenkräften  $\underline{\mathfrak{P}}(\underline{x})$  und von Inkompatibilitäten  $\eta(\underline{x})$  anzugeben, welches gerade das vorgegebene Spannungsfeld als Gesamtspannung in dem betrachteten Körper hervorruft. Diese Aufgabe hat stets eine Lösung, falls nur sämtliche benötigten Ableitungen von  $\underline{\sigma}$  und  $\underline{s}$  existieren oder wenigstens geeignete Ersatzoperationen [89–91] dafür angegeben werden können; sie ist im Vergleich zu den bisher behandelten Problemen geradezu trivial. In der Tat, setzt man

$$\underline{p} = - \text{Div } \underline{\sigma} \quad (3.3.53)$$

$$\underline{\varepsilon}^E = \underline{s} \cdot \underline{\sigma} \quad (3.3.54)$$

$$\eta = \text{Ink } \underline{\varepsilon}^E \quad (3.3.55)$$

$$\underline{\mathfrak{P}} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \quad (3.3.56)$$

so erkennt man nach (3.3.19), (3.3.24), (3.3.22) und (3.3.45) in (3.3.53–56) sofort das Größensystem  $\underline{p}, \underline{\mathfrak{P}}, \eta$ , welches seinerseits nach (3.3.30) das Spannungsfeld  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^G$  eindeutig bestimmt. Die Zuordnung zwischen den Größen  $\underline{p}, \underline{\mathfrak{P}}, \eta$  einerseits und dem Spannungsfeld  $\underline{\sigma}$  andererseits ist also eineindeutig in einem vorgegebenen Körper mit den Elastizitätskoeffizienten  $\underline{\sigma}(\underline{x})$ . Die Extra-

\*) Eine mögliche Variante dieses Verfahrens besteht darin, daß man für  $\underline{\sigma}^K$  die Randbedingung

$$\underline{n} \cdot \underline{\sigma}^K = - \underline{\mathfrak{P}} \quad (3.3.52a)$$

vorschreibt. Dann wird aus (3.3.45)

$$\underline{n} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^* = 0 \quad (3.3.52b)$$

Vgl. auch (3.6.33–37) und [98].

dehnung  $\varepsilon^Q$  ist allerdings nach (3.3.28) wegen (3.3.8) nur bis auf einen beliebigen Deformator bestimmt. Damit ist nachgewiesen, daß den allgemeinen Spannungsfeldern, wie wir sie im Anschluß an *Prager* und *Synge* [34] in diesem Paragraphen benutzen, stets auch ein physikalischer Sinn beigelegt werden kann. Dies bedeutet, daß man in einem vorgegebenen Körper jedes beliebige Spannungsfeld erzeugen kann, wenn man nur die Volumen- und Oberflächenkräfte sowie die Extradehnung entsprechend wählt. Spezialisierungen sind leicht zu erhalten. So kann man durch ein passend gewähltes System von Volumen- und Oberflächenkräften jedes beliebige Verschiebungsfeld und durch eine geeignete Extradehnung nebst Oberflächenkräften jedes beliebige Spannungsfunktionenfeld in einem elastischen Körper erzielen. Um das einzusehen, braucht man nur mit dem Ansatz (3.3.14) bzw. (3.3.16) in (3.3.53–56) einzugehen und (3.3.8, 10) zu beachten. Die Oberflächenkräfte im zweiten Fall verschwinden, wenn man das Spannungsfunktionenfeld von vornherein durch die Randbedingung (3.3.33) einschränkt. Wir benutzen das Ergebnis (3.3.53–56) zur Formulierung des Zerlegungssatzes.

**Zerlegungssatz:** Ein beliebiges Spannungsfeld  $\sigma(\mathbf{x})$  in einem elastischen Körper mit den Elastizitätskonstanten  $\underline{c}(\mathbf{x})$  läßt sich stets in der Form (3.3.30)

$$\sigma = \underline{c} \cdot \text{Def } \mathfrak{w} + \text{Ink } \chi \quad (3.3.57)$$

anschreiben, falls nur die Größen (3.3.53–56) erklärt sind und die Differentialgleichungen (3.3.20) sowie (3.3.23) und die zweite Randwertaufgabe Lösungen haben. Schreibt man ferner nach (3.3.33) vor

$$\mathfrak{n} \cdot \text{Ink } \chi = 0 \quad (3.3.58)$$

und hat die dadurch bestimmte zweite Randwertaufgabe eine Lösung  $\sigma'$  so, sind  $\text{Def } \mathfrak{w}$  und  $\text{Ink } \chi$  auch eindeutig bestimmt. Dagegen kann bei  $\mathfrak{w}$  nach (3.3.9) noch eine willkürliche starre Bewegung und bei  $\chi$  nach (3.3.8) noch ein willkürlicher Deformator hinzugefügt werden.

Der Beweis ergibt sich ohne weiteres aus dem Vorangehenden. Falls (3.3.58) nicht von vornherein erfüllt ist, haben wir noch zu zeigen, daß es für ein vorgegebenes Spannungsfeld  $\sigma'$  stets ein Verschiebungsfeld  $\mathfrak{w}'$  und ein Spannungsfunktionenfeld  $\chi'$  derart gibt, daß

$$\sigma' = \underline{c} \cdot \text{Def } \mathfrak{w}' = \text{Ink } \chi' \quad (3.3.59)$$

sofern nur  $\sigma'$  die homogene Gleichgewichtsbedingung (3.3.11) und  $\underline{s} \cdot \sigma'$  die homogene Kompatibilitätsbedingung (3.3.12) erfüllt. Das ist aber nach ([98], Ziff. 2) unter sehr allgemeinen Stetigkeitsbedingungen der Fall. Auch kann man bei mehrfach zusammenhängenden Körpern Mehrwertigkeiten von  $\mathfrak{w}$  vermeiden, indem man das Spannungsfeld etwa vorhandener *Volterrascher* Distorsionen dem Anteil  $\text{Ink } \chi$  zurechnet. Der Zerlegungssatz (3.3.57–58) ist eine Erweiterung des von *Kröner* [27] angegebenen Zerlegungssatzes.

Wir bemerken noch, daß die Aufgaben 3.3.A–E keineswegs die einzigen möglichen Fragestellungen der Elastostatik enthalten. Ein weiter Problembereich ergibt sich z. B., wenn man die Extradehnung zur Variation zuläßt und die

Gesetze untersucht, nach denen elastische Spannungen auf Kristallumlagerungen, magnetische, elektrische, chemische und thermische Vorgänge usw. einwirken [19, 25–28, 95–97, 101, 113]. Bereits das Problem der Gußspannungen zeigt ein eigentümliches Ineinandergreifen der Probleme 3.3.A, C und E [115].

### 3.4 Der Satz von *Colonnetti* und verwandte Sätze

Wir kehren wieder zu der in § 3.1, 2 eingeführten Terminologie zurück und beziehen alle elastischen Zustände  $f$  mit dem Spannungsfeld  $\sigma(x)$  auf einen Grundkörper  $K^\circ$ , dessen elastische Eigenschaften durch die Tensoren 4. Stufe  $\underline{s}^\circ(x)$  bzw.  $\underline{c}^\circ(x)$  beschrieben werden. Da wir über den Grundkörper  $K^\circ$  nur die in der Elastizitätstheorie allgemein üblichen Voraussetzungen gemacht haben, wird der Gültigkeitsbereich der folgenden Sätze dadurch nicht eingeschränkt.

Es seien nun in diesem Grundkörper  $K^\circ$  zwei elastische Zustände  $\hat{f}$  und  $\hat{f}'$  mit den Spannungsfeldern  $\hat{\sigma}(x)$  und  $\hat{\sigma}'(x)$  gegeben, und es gelte für beide Zustände der Zerlegungssatz (3.3.57) mit der Nebenbedingung (3.3.58); es sei also

$$\hat{f} = \hat{f}' + \hat{f}'' \quad (3.4.1)$$

$$\hat{\hat{f}} = \hat{\hat{f}}' + \hat{\hat{f}}'' \quad (3.4.2)$$

wo

$$\hat{f}' \triangleq \underline{c}^\circ \cdots \text{Def } \hat{w}, \quad \hat{f}'' \triangleq \text{Ink } \hat{\underline{\chi}} \quad (3.4.3)$$

$$\hat{\hat{f}} \triangleq \underline{c}^\circ \cdots \text{Def } \hat{\hat{w}}, \quad \hat{\hat{f}}'' \triangleq \text{Ink } \hat{\hat{\underline{\chi}}} \quad (3.4.4)$$

und die Addition zweier elastischer Zustände durch die Addition der zugehörigen Spannungsfelder erklärt ist. Die Nebenbedingungen (3.3.58) lauten

$$n \cdot \text{Ink } \hat{\underline{\chi}} = 0 \quad (3.4.5)$$

$$n \cdot \text{Ink } \hat{\hat{\underline{\chi}}} = 0 \quad (3.4.6)$$

an der Oberfläche von  $K^\circ$ . Das Skalarprodukt zweier Zustände ist wieder nach (3.1.13) als die Wechselwirkungsenergie beider Zustände in  $K^\circ$  definiert.

**Satz 1:** Für zwei elastische Zustände  $\hat{f}$  und  $\hat{f}'$  mit den Eigenschaften (3.4.1–6) gilt

$$\{\hat{f}, \hat{f}'\} = \{\hat{f}', \hat{f}'\} + \{\hat{f}', \hat{f}''\} \quad (3.4.7)$$

In der Ausdrucksweise (2.5.49) ff. heißt dies, daß  $\hat{f}'$  sowie  $\hat{\hat{f}}$  einerseits und  $\hat{f}''$  sowie  $\hat{\hat{f}}''$  andererseits zueinander orthogonalen Unterräumen des Zustandsraumes angehören. Das bedeutet physikalisch, daß die elastische Wechsel-

wirkungsenergie eines Lastspannungszustandes mit einem Eigenspannungszustand im selben Körper stets verschwindet\*).

Zum Beweis schreiben wir (3.4.7) mit (3.4.1–6) und (3.1.13) aus

$$\begin{aligned}\{\hat{f}, \hat{f}\} &= \{\hat{f}' + \hat{f}'', \hat{f}' + \hat{f}''\} \\ &= \int_{(V_o)} (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \text{Def } \hat{\mathfrak{w}} + \text{Ink } \hat{\underline{\chi}}) \cdot \underline{\varepsilon}^\circ \cdot (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \text{Def } \hat{\mathfrak{w}} + \text{Ink } \hat{\underline{\chi}}) dV \\ &= \{\hat{f}', \hat{f}'\} + \{\hat{f}'', \hat{f}''\} + \{\hat{f}', \hat{f}''\} + \{\hat{f}'', \hat{f}'\} \quad (3.4.8) \\ &\quad \text{wo}\end{aligned}$$

$$\{\hat{f}', \hat{f}'\} = \int_{(V_o)} \text{Def } \hat{\mathfrak{w}} \cdot \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \text{Def } \hat{\mathfrak{w}} dV \quad (3.4.9)$$

$$\{\hat{f}'', \hat{f}''\} = \int_{(V_o)} \text{Ink } \hat{\underline{\chi}} \cdot \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \text{Ink } \hat{\underline{\chi}} dV \quad (3.4.10)$$

$$\{\hat{f}', \hat{f}''\} = \int_{(V_o)} \text{Def } \hat{\mathfrak{w}} \cdot \text{Ink } \hat{\underline{\chi}} dV \quad (3.4.11)$$

$$\{\hat{f}'', \hat{f}'\} = \int_{(V_o)} \text{Ink } \hat{\underline{\chi}} \cdot \text{Def } \hat{\mathfrak{w}} dV \quad (3.4.12)$$

ist. Wir müssen zeigen, daß die beiden Ausdrücke (3.4.11–12) verschwinden. In der Tat liefert eine partielle Integration nach dem Gaußschen Satz [81] für (3.4.11)

$$\begin{aligned}\{\hat{f}', \hat{f}''\} &= \int_{(V_o)} \text{Def } \hat{\mathfrak{w}} \cdot \text{Ink } \hat{\underline{\chi}} dV = \int_{(V_o)} \overbrace{\nabla \cdot \text{Ink } \hat{\underline{\chi}} \cdot \hat{\mathfrak{w}}} dV \\ &= \oint_{(S_o)} \mathbf{n} \cdot \text{Ink } \hat{\underline{\chi}} \cdot \hat{\mathfrak{w}} d\mathbf{f} - \int_{(V_o)} (\text{Div Ink } \hat{\underline{\chi}}) \cdot \hat{\mathfrak{w}} dV \quad (3.4.13)\end{aligned}$$

Hier verschwindet aber das Oberflächenintegral nach (3.4.6) und das Volumenintegral nach (3.3.10). Entsprechend zeigt man, daß (3.4.12) verschwindet, womit Satz 1 bewiesen ist.

**Satz 2** (Satz von *Colonnetti* ([27], S. 62)): Für einen elastischen Zustand  $f$  mit den Eigenschaften (3.4.1–6) gilt

$$\{f, f\} = \{f', f'\} + \{f'', f''\} \quad (3.4.14)$$

Physikalisch heißt dies, daß sich die elastische Energie eines beliebigen Zustandes des Grundkörpers  $K^\circ$  additiv zusammensetzt aus der Energie des Lastspannungsanteils und des Eigenspannungsanteils.

\*) Eng mit Satz 1 zusammen hängt die von *A. Föppl* ([164], S. 301) auf anderem Wege hergeleitete Aussage, „daß die Eigenspannungen ohne Einfluß auf das elastische Verhalten des Körpers gegenüber einer Belastung sind“.

Der Satz von *Colonnetti* ergibt sich einfach als Corollar zu Satz 1, wenn man

$$\hat{f} = \hat{\hat{f}} = f \quad (3.4.15)$$

setzt, d. h. also physikalisch gesprochen aus dem Verschwinden der Wechselwirkungsenergie eines beliebigen Lastspannungszustandes mit einem Eigen Spannungszustand im selben Körper.

**Satz 3** (Satz von *Betti* und *Rayleigh* [1, 2, 43, 46, 78]): Setzt man (vgl. (3.3.53-58))

$$\hat{\mathbf{r}} = - \text{Div} (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } \hat{\mathbf{w}}), \quad \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{n} \cdot (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } \hat{\mathbf{w}}) \quad (3.4.16)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = - \text{Div} (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } \hat{\mathbf{w}}), \quad \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{n} \cdot (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } \hat{\mathbf{w}}) \quad (3.4.17)$$

so erhält man für den Ausdruck (3.4.9)

$$\begin{aligned} \{\hat{f}', \hat{\hat{f}}'\} &= \int_{(\hat{V}_\circ)} \text{Def } \hat{\mathbf{w}} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } \hat{\mathbf{w}} \, dV \\ &= \oint_{(\hat{S}_\circ)} \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{w}} \, df + \int_{(\hat{V}_\circ)} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{w}} \, dV = \oint_{(\hat{S}_\circ)} \hat{\mathbf{w}} \cdot \hat{\mathbf{R}} \, df + \int_{(\hat{V}_\circ)} \hat{\mathbf{w}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \, dV \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Physikalisch gesprochen ist also die Wechselwirkungsenergie zweier Lastspannungszustände  $\hat{f}'$  und  $\hat{\hat{f}}'$  im selben Körper gleich der Arbeit, die das Kräftesystem des einen Lastspannungszustandes am Verschiebungsfeld des anderen Lastspannungszustandes leistet, wobei  $\hat{f}'$  und  $\hat{\hat{f}}'$  vertauscht werden können.

Der Beweis folgt in bekannter Weise durch partielle Integration nach dem *Gaußschen* Satz. Man erhält z. B.

$$\begin{aligned} \{\hat{f}', \hat{\hat{f}}'\} &= \int_{(\hat{V}_\circ)} \text{Def } \hat{\mathbf{w}} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } \hat{\mathbf{w}} \, dV = \int_{(\hat{V}_\circ)} \overbrace{\nabla \cdot (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } \hat{\mathbf{w}})} \cdot \hat{\mathbf{w}} \, dV \\ &= \oint_{(\hat{S}_\circ)} \mathbf{n} \cdot (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } \hat{\mathbf{w}}) \cdot \hat{\mathbf{w}} \, df - \int_{(\hat{V}_\circ)} (\text{Div} (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } \hat{\mathbf{w}})) \cdot \hat{\mathbf{w}} \, dV \\ &= \oint_{(\hat{S}_\circ)} \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{w}} \, df + \int_{(\hat{V}_\circ)} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{w}} \, dV \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

und einen entsprechenden Ausdruck bei Vertauschung von  $\hat{f}'$  und  $\hat{\hat{f}}'$ . Bei mehrfach zusammenhängenden Körpern müssen die Verschiebungen  $\hat{\mathbf{w}}$  und  $\hat{\hat{\mathbf{w}}}$  räumlich einwertig sein, was sich nach den Bemerkungen im Anschluß an (3.3.59) stets erreichen läßt.

Wir suchen eine entsprechende Darstellung für (3.4.10). Zunächst liefert zweimalige Anwendung des *Gaußschen* Satzes (vgl. Anhang)

$$\begin{aligned} \{\hat{f}'', \hat{f}''\} &= \int_{(V^{\circ})} \text{Ink } \hat{\underline{\chi}} \cdot \cdot \hat{s}^{\circ} \cdot \cdot \text{Ink } \hat{\underline{\chi}} \, dV \\ &= \oint_{(S^{\circ})} (\nabla \times \hat{\underline{\chi}} \times \mathbf{n}) \cdot \cdot \hat{\underline{\varepsilon}} \, df - \oint_{(S^{\circ})} \hat{\underline{\chi}} \cdot \cdot (\nabla \times \hat{\underline{\varepsilon}} \times \mathbf{n}) \, df + \int_{(V^{\circ})} \hat{\underline{\chi}} \cdot \cdot \hat{\underline{\eta}} \, dV \quad (3.4.20)^* \end{aligned}$$

mit

$$\hat{\underline{\varepsilon}} = \hat{\underline{\varepsilon}}^E = \hat{s}^{\circ} \cdot \cdot \text{Ink } \hat{\underline{\chi}}, \quad \hat{\underline{\eta}} = \text{Ink } \hat{\underline{\varepsilon}} \quad (3.4.21)$$

Nun haben wir eine freie und unbelastete Oberfläche vorausgesetzt; daraus folgt nach ([98], (2.12)), daß sich  $\hat{\underline{\chi}}$  an der Oberfläche samt seinen in (3.4.20) erscheinenden Ableitungen wie ein Deformator verhält, also seine Randwerte aus einem erzeugenden Vektor  $\hat{\underline{\mathfrak{Q}}}$  abgeleitet werden können durch

$$\hat{\underline{\chi}} = \text{Def } \hat{\underline{\mathfrak{Q}}} \quad (3.4.22)$$

Der erzeugende Vektor seinerseits läßt sich — analog zur entsprechenden Formel von *Cesàro* [1, 2, 98] für die Berechnung der Verschiebung aus der Dehnung — aus den Randwerten von  $\hat{\underline{\chi}}$  und eines Teils seiner Normalableitungen bestimmen durch

$$\hat{\underline{\mathfrak{Q}}}(\bar{\mathbf{r}}) = \oint_{\bar{\mathfrak{C}}} d\bar{\mathbf{r}} \cdot \left( \hat{\underline{\chi}}(\bar{\mathbf{r}}) + (\hat{\underline{\chi}}(\bar{\mathbf{r}}) \times \bar{\nabla}) \times (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}) \right) \quad (3.4.23)$$

wo der Integrationsweg  $\bar{\mathfrak{C}}$  ganz auf der Oberfläche  $S_0$  verläuft. Aus ([98], Ziff. 5a) entnimmt man, daß  $\hat{\underline{\mathfrak{Q}}}$  genau dann eindeutig bestimmt ist, wenn entweder der Grundkörper  $K^{\circ}$  einfach zusammenhängt, oder wenn bei mehrfachem Zusammenhang der elastische Zustand  $\hat{f}'$  keine *Volterraschen* Distorsionen enthält.

Unser Ziel ist es nun, den Ausdruck (3.4.20) ganz auf die Inkompatibilitäten und die daraus nach der Randwert- und Summationsaufgabe 3.3.C herzuleitenden Spannungsfunktionen umzuschreiben, welche nach (3.4.23) auch den Vektor  $\hat{\underline{\mathfrak{Q}}}$  auf der Oberfläche bestimmen. Dazu können bei mehrfach zusammenhängendem Grundkörper  $K^{\circ}$  auch noch die Bestimmungsgrößen *Volterrascher* Distorsionszustände kommen. Für das Volumenintegral in (3.4.20) haben wir dieses Ziel schon erreicht; um die Oberflächenintegrale zu untersuchen, erstrecken wir sie zunächst einmal nicht über die ganze Oberfläche  $S_0$  von  $K^{\circ}$ , sondern nur über ein einfach zusammenhängendes Teilstück  $F$  mit der geschlossenen Randkurve  $\mathfrak{C}$ . Setzen wir nun (3.4.22) ein, so liefert eine im Anhang wiedergegebene Umformung

$$\begin{aligned} &\int_{(F)} (\nabla \times \hat{\underline{\chi}} \times \mathbf{n}) \cdot \cdot \hat{\underline{\varepsilon}} \, df - \int_{(F)} \hat{\underline{\chi}} \cdot \cdot (\nabla \times \hat{\underline{\varepsilon}} \times \mathbf{n}) \, df \\ &= \frac{1}{2} \oint_{(\mathfrak{C})} d\mathbf{r} \cdot \left( (\hat{\underline{\varepsilon}} \times \nabla) \cdot \hat{\underline{\mathfrak{Q}}} - \hat{\underline{\varepsilon}} \cdot (\nabla \times \hat{\underline{\mathfrak{Q}}}) \right) - \int_{(F)} \hat{\underline{\mathfrak{Q}}} \cdot \text{Ink } \hat{\underline{\varepsilon}} \cdot \mathbf{n} \, df \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{(F)} \mathbf{n} \cdot \left( \nabla \times \hat{\underline{\varepsilon}} \times \hat{\underline{\mathfrak{Q}}} \right) \cdot \nabla \, df + \frac{1}{2} \int_{(F)} \nabla \cdot \left( \nabla \times \hat{\underline{\varepsilon}} \times \hat{\underline{\mathfrak{Q}}} \right) \cdot \mathbf{n} \, df \quad (3.4.24) \end{aligned}$$

\* )  $\mathbf{n}$  wird nicht differenziert.

Ist nun der Grundkörper  $K^\circ$  einfach zusammenhängend, so ist  $\hat{\mathfrak{Q}}$  durch (3.4.22–23) eindeutig bestimmt, denn jede Mehrdeutigkeit von  $\hat{\mathfrak{Q}}$  beim Umlauf um eine singuläre Stelle würde nach den Formeln von *Peretti*, *Bloch* und *Günther* [98, 105, 117, 118] eine an der Oberfläche angreifende Dyname bedeuten, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Man kann dann die Teilfläche  $F$  zur vollen Oberfläche  $S_0$  erweitern, wobei sich die Randkurve  $\mathfrak{C}$  auf einen regulären Punkt von  $S_0$  zusammenzieht (Kanten und Ecken sind natürlich besonders zu untersuchen). Das Umlaufintegral längs  $\mathfrak{C}$  verschwindet also. Weiter kann man dann das Vektorfeld  $\hat{\mathfrak{Q}}$  eindeutig ins Innere von  $K^\circ$  fortsetzen und somit die beiden letzten Flächenintegrale nach dem *Gaußschen* Satz in Volumenintegrale umwandeln, indem man  $df$  n formal durch  $dV \nabla$  ersetzt; man erkennt dann, daß sich die Volumenintegrale gegenseitig wegheben. Es bleibt, wenn man (3.4.21) einsetzt und in (3.4.20) eingeht

$$\{\hat{f}', \hat{f}''\} = - \oint_{(S_0)} \hat{\mathfrak{Q}} \cdot \hat{\eta} \cdot n \, df + \int_{(V_0)} \hat{\chi} \cdot \hat{\eta} \, dV \quad (3.4.25)$$

Man erkennt den von *Southwell* und *Eshelby* behandelten Sonderfall, daß für  $n \cdot \hat{\eta} = 0$  das Oberflächenintegral verschwindet ([27], S. 63; [101, 119]). Übrigens läßt sich das Verschwinden des Oberflächenintegrals auch für beliebiges  $\hat{\eta}$  stets erreichen, da nach (3.3.8) zu  $\hat{\chi}$  immer ein beliebiges Deformatorfeld hinzugefügt werden kann, ohne daß sich an den Spannungen etwas ändert. Doch kann dies praktisch zuweilen nicht ganz einfach oder gar unmöglich sein, wenn man die Nebenbedingungen spezieller Spannungsfunktionsansätze berücksichtigen muß [98, 105, 114, 116].

Da der Fall eines mehrfach zusammenhängenden Körpers die Einführung einiger neuer Begriffe erfordert und sich daher nicht mit der an dieser Stelle gebotenen Kürze abhandeln läßt, verzichten wir hier auf seine Untersuchung und verweisen auf den Anhang. Für einfach zusammenhängende Körper  $K^\circ$  fassen wir das Ergebnis zusammen in

**Satz 4:** Setzt man für einen einfach zusammenhängenden Grundkörper (vgl. (3.3.53–58))

$$\hat{\eta} = \text{Ink}(\hat{s}^\circ \cdot \text{Ink} \hat{\chi}), \quad \hat{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{r}) = \oint_{\mathfrak{C}_0}^{\mathfrak{r}} d\bar{\mathfrak{r}} \cdot (\hat{\chi}(\bar{\mathfrak{r}}) + \hat{\chi}(\bar{\mathfrak{r}}) \times \bar{\nabla}) \times (\bar{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}) \quad (3.4.26)$$

$$\hat{\eta} = \text{Ink}(\hat{s}^\circ \cdot \text{Ink} \hat{\chi}), \quad \hat{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{r}) = \oint_{\mathfrak{C}_0}^{\mathfrak{r}} d\bar{\mathfrak{r}} \cdot (\hat{\chi}(\bar{\mathfrak{r}}) + (\hat{\chi}(\bar{\mathfrak{r}}) \times \bar{\nabla}) \times (\bar{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r})) \quad (3.4.27)$$

wo der Integrationsweg  $\mathfrak{C}$  auf der Oberfläche verläuft, so sind  $\hat{\mathfrak{Q}}$  und  $\hat{\mathfrak{Q}}$  bei Gültigkeit der Randbedingungen (3.4.5–6) eindeutig erklärt, und es wird aus (3.4.10)

$$\begin{aligned} \{\hat{f}', \hat{f}''\} &= \int_{(V_0)} \text{Ink} \hat{\chi} \cdot \hat{s}^\circ \cdot \text{Ink} \hat{\chi} \, dV \\ &= - \oint_{(S_0)} \hat{\mathfrak{Q}} \cdot \hat{\chi} \cdot n \, df + \int_{(V_0)} \hat{\chi} \cdot \hat{\eta} \, dV = - \oint_{(S_0)} \hat{\mathfrak{Q}} \cdot \hat{\eta} \cdot n \, df + \int_{(V_0)} \hat{\chi} \cdot \hat{\eta} \, dV \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

Dieser Satz hat für Eigenspannungszustände dieselbe Bedeutung wie der *Betti-Rayleighs*che Satz für Lastspannungszustände. Leider sind die hier erscheinenden Größen bei weitem nicht so einfach zu deuten wie die Kräfte und Verschiebungen im *Betti-Rayleighs*chen Satz. Am besten weiß man noch über die differentialgeometrische Bedeutung der Inkompatibilität Bescheid [26–28, 120, 121]; in der statischen Deutung der Spannungsfunktionen ist man, von Sonderfällen abgesehen, über einige einfache Ansätze mit Hilfe des Bildes der „Krustenschale“ und der „Krustenhülle“ nicht hinausgekommen [59, 60, 98, 116]. Auf die Möglichkeit einer Darstellung der Form (3.4.26–28) wurde wohl zuerst von *Indenbom* [108] hingewiesen, allerdings ohne nähere Angaben über Einzelheiten. Ähnliche Formeln für die Selbstenergie stammen von *Southwell* und *Eshelby* [27, 101, 119]. Eine physikalische Deutung der elastischen Energie der Eigenspannungen ergibt sich im Gedankenversuch als die mechanische Arbeit, die bei der Zerschneidung des Körpers in kleinste Teile frei wird [19, 27, 96, 101, 111].

### 3.5 Iteration mit Lastspannungszuständen (sukzessive Belastung)

Gegeben sei ein Realkörper  $K^+$  mit den Elastizitätskonstanten  $\mathfrak{c}^+$  und eigentlich positiv definiter elastischer Energie. Wir wählen dazu einen Grundkörper  $K^\circ$  von derselben Form, aber mit den Elastizitätskonstanten  $\mathfrak{c}^\circ$ ; seine elastische Energie sei ebenfalls eigentlich positiv definit, und wir setzen außerdem voraus, daß in ihm Lösungen zu den Problemen 3.3.A und 3.3.B existieren und eindeutig bestimmt seien in dem Umfang, wie es für die Lösungen der folgenden Aufgaben erforderlich ist. Da  $K^\circ$  willkürlich wählbar ist, wird sich das stets erreichen lassen, wenn die vorgegebene Oberflächenform von  $K^+$  keine zu starken Singularitäten aufweist, also z. B. die Oberfläche  $S_0$  überall glatt ist oder — falls dies mit der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen noch verträglich ist — höchstens eine endliche Zahl von Ecken und Kanten aufweist.

Nun sei die Lösung eines allgemeinen Lastspannungsproblems, also des zweiten Randwertproblems (3.3.18) und des Summationsproblems (3.3.20) für den Realkörper  $K^+$  gesucht, eine Aufgabe, die besonders dann sehr große Schwierigkeiten macht, wenn die Elastizitätskonstanten  $\mathfrak{c}^+$  vom Ort abhängen, der Realkörper  $K^+$  also nichthomogen ist. Falls jedoch seine Oberfläche von genügend einfacher Gestalt ist, mag die Lösung derartiger Probleme wenigstens in dem gleichgeformten Grundkörper  $K^\circ$  mit erträglichem Aufwand möglich sein, wenn man ihn z. B. isotrop und homogen, vielleicht sogar von verschwindender Querkontraktion wählt. Ähnliches mag gelten, wenn der Realkörper  $K^+$  zwar homogen, aber elastisch anisotrop ist; auch dies kann die Lösung eines Lastspannungsproblems bereits sehr erschweren. Wir suchen nun die Lösung des vorgegebenen Problems im Realkörper auf eine Folge von Lastspannungsproblemen im Grundkörper zurückzuführen. Grundsätzlich sind durch Einführung von Quasi-Kräften nach (3.3.34–38) auch Eigenspannungsprobleme der im folgenden beschriebenen Methode zugänglich.

Wir konstruieren dazu einen Operator  $\mathfrak{Q}'$  im Unterraum der Lastspannungszustände  $f'$  des Zustandsraums (vgl. (3.4.3)) mit Hilfe eines „Differenzkörpers“  $K^-$  mit den Elastizitätskonstanten

$$\mathfrak{c}^- = \mathfrak{c}^\circ - \mathfrak{c}^+ \quad (3.5.1)$$



Im Differenzkörper mag die elastische Energie beliebig positiv oder negativ sein; er braucht also nicht einem physikalisch realisierbaren Körper zu entsprechen. Sei nun  $f^0$  ein beliebiger Lastspannungszustand im Grundkörper  $K^\circ$ , repräsentiert durch

$$\varepsilon'^0 = \text{Def } w^0, \quad \underline{\sigma}'^0 = \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } w^0 \quad (3.5.2)$$

und es sei

$$\text{Div } (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } w^0) = - r^0 \quad (3.5.3)$$

$$n \cdot (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } w^0) = \mathfrak{R}^0 \quad (3.5.4)$$

Dann definieren wir einen neuen Lastspannungszustand in  $K^\circ$

$$f^1 = \mathfrak{B}' f^0 \quad (3.5.5)$$

indem wir zunächst dem Differenzkörper  $K^-$  die Dehnung  $\varepsilon'^0$  aufzwingen; hierzu sind in  $K^-$  die Volumen- und Oberflächenkräfte

$$q^0 = - \text{Div } (\underline{\varepsilon}^- \cdot \cdot \text{Def } w^0) \quad (3.5.6)$$

$$\mathfrak{Q}^0 = n \cdot (\underline{\varepsilon}^- \cdot \cdot \text{Def } w^0) \quad (3.5.7)$$

erforderlich. Nun bringen wir dieses Kräftesystem in  $K^\circ$  an, setzen also

$$r^1 = q^0 \quad (3.5.8)$$

$$\mathfrak{R}^1 = \mathfrak{Q}^0 \quad (3.5.9)$$

Damit bestimmen sich die Repräsentationen des neuen Lastspannungszustandes (3.5.5)

$$\varepsilon'^1 = \text{Def } w^1, \quad \underline{\sigma}'^1 = \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } w^1 \quad (3.5.10)$$

aus der Lösung des Randwert- und Summationsproblems

$$\text{Div } (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } w^1) = - r^1 \quad (3.5.11)$$

$$n \cdot (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } w^1) = \mathfrak{R}^1 \quad (3.5.12)$$

Wie in § 3.2 ist die Linearität dieses Operators leicht zu verifizieren; auch die Prüfung auf Symmetrie — wenigstens im Unterraum der Lastspannungszustände — erfolgt ganz ähnlich wie in (3.2.5–7); nur beschränken wir uns hier auf den Unterraum der Lastspannungszustände. Seien also  $\hat{f}^0$  und  $\hat{f}^1$  zwei beliebige Lastspannungszustände im Grundkörper  $K^\circ$ , so erhalten wir durch Anwendung der Gleichung (3.4.18) des *Betti-Rayleigh*schen Satzes zunächst im Grundkörper und sodann in umgekehrter Reihenfolge im Differenzkörper wegen (3.5.3–12)

$$\begin{aligned} \{\hat{f}^0, \mathfrak{B}' \hat{f}^1\} &= \{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} = \int_{(V_e)} \text{Def } \hat{w}^0 \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } \hat{w}^1 dV \\ &= \oint_{(S_e)} \hat{w}^0 \cdot \hat{\mathfrak{R}}^1 df + \int_{(V_e)} \hat{w}^0 \cdot \hat{r}^1 dV = \oint_{(S_e)} \hat{w}^0 \cdot \hat{\mathfrak{Q}}^0 df + \int_{(V_e)} \hat{w}^0 \cdot \hat{q}^0 dV \\ &= \int_{(V_e)} \text{Def } \hat{w}^0 \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^- \cdot \cdot \text{Def } \hat{w}^0 dV \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

woraus man wegen der Symmetrieeigenschaften (3.1.11) von  $\underline{\varepsilon}^-$  leicht abliest

$$\{\hat{f}^0, \mathfrak{B}' \hat{f}^0\} = \{\hat{f}^0, \mathfrak{B}' \hat{f}^0\} \quad (3.5.14)$$

Das bedeutet aber nach (2.4.45) Symmetrie des Operators  $\mathfrak{B}'$  im Unterraum der Lastspannungszustände.

Nun definieren wir eine Iterationsfolge des Typs (2.6.6)

$$[f']^{n+1} = [f'^*] + \mathfrak{B}' [f']^n \quad (3.5.15)$$

wo  $[f'^*]$  bestimmt ist durch die Repräsentationen

$$[\underline{\varepsilon}'^*] = \text{Def} [\mathfrak{w}^*], \quad [\underline{\varepsilon}'^*] = \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def} [\mathfrak{w}^*] \quad (3.5.16)$$

welche die Gleichungen

$$\text{Div} (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot [\mathfrak{w}^*]) = - [\mathfrak{p}] \quad (3.5.17)$$

$$\mathfrak{n} \cdot (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot [\mathfrak{w}^*]) = [\mathfrak{P}] \quad (3.5.18)$$

erfüllen. Die Volumenkraftdichte  $[\mathfrak{p}]$  und die Oberflächenkraftdichte  $[\mathfrak{P}]$  bilden das gegebene Kräftesystem, zu welchem das Spannungsfeld im Realkörper  $K^+$  gesucht ist.

Ein hinreichendes Konvergenzkriterium erhält man aus ähnlichen Überlegungen wie in § 3.2. Zunächst führt nach (3.5.13) eine den Abschätzungen (3.2.9–13) analoge Schlußweise auf das Konvergenzkriterium

$$\limsup \left| \frac{\text{Def } \mathfrak{w} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^- \cdot \cdot \text{Def } \mathfrak{w}}{\text{Def } \mathfrak{w} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } \mathfrak{w}} \right| < 1 \quad (3.5.19)$$

wo  $\mathfrak{w}$  eine beliebige variable Verschiebungsfunktion ist. Nun ist die Menge aller Dehnungen  $\text{Def } \mathfrak{w}$ , die die homogenen Kompatibilitätsbedingungen erfüllen, sicher enthalten in der Menge aller Dehnungen  $\underline{\varepsilon}$ , die keiner Einschränkung unterliegen. Es gilt somit

$$\limsup \left| \frac{\text{Def } \mathfrak{w} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^- \cdot \cdot \text{Def } \mathfrak{w}}{\text{Def } \mathfrak{w} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Def } \mathfrak{w}} \right| \leq \limsup \left| \frac{\underline{\varepsilon} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^- \cdot \cdot \underline{\varepsilon}}{\underline{\varepsilon} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \underline{\varepsilon}} \right| \quad (3.5.20)$$

Damit erhält man das einfachere, allerdings auch schwächere Konvergenzkriterium

$$\limsup \left| \frac{\underline{\varepsilon} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^- \cdot \cdot \underline{\varepsilon}}{\underline{\varepsilon} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \underline{\varepsilon}} \right| < 1 \quad (3.5.21)$$

Nach (3.5.1) ist die Erfüllung dieses Konvergenzkriteriums nur dann möglich, wenn die elastische Energie im Realkörper  $K^+$  eigentlich positiv definit ist, also

$$\liminf \frac{\underline{\varepsilon} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^+ \cdot \cdot \underline{\varepsilon}}{\underline{\varepsilon} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \underline{\varepsilon}} > 0, \quad \limsup \frac{\underline{\varepsilon} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^+ \cdot \cdot \underline{\varepsilon}}{\underline{\varepsilon} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \underline{\varepsilon}} < \infty \quad (3.5.22)$$

gilt. Dann läßt sich aber auch immer ein Grundkörper der Art finden, daß der zugehörige Differenzkörper das Kriterium (3.5.21) erfüllt. Die im Normalfall beste Wahl von  $K^\circ$  ergibt sich dann aus der Forderung, daß die obere und die untere Grenze des Bruchs in (3.5.21) denselben Betrag haben; allerdings ist diese Regel keineswegs zuverlässig. Läßt sich dagegen keine positive untere Schranke für (3.5.22) angeben, so wird der Konvergenzbeweis in dieser einfachen Form hinfällig. Das ist z. B. der Fall, wenn  $\underline{c}^+$  im Volumen  $V_0$  stellenweise ganz verschwindet und insbesondere, wenn der Realkörper  $K^+$  eine von  $K^\circ$  abweichende, kleinere Begrenzung hat. Dann bringt bereits der Genauigkeitsverlust von (3.5.20) den Konvergenzbeweis zum Scheitern; man muß nun Kräfte in den Löchern von  $K^+$  ausschließen sowie die Existenz- und Eindeutigkeitsätze für das zweite Randwertproblem in  $K^+$  in die Voraussetzungen aufnehmen, wie wir im nächsten Paragraphen (§ 4) im einzelnen sehen werden. Daß der Konvergenzbeweis — nicht notwendig auch das Iterationsverfahren in Spezialfällen — versagen muß, wenn  $\underline{c}^+$  irgendwo in  $V_0$  über alle Grenzen wächst, bedarf wohl keiner Erläuterung, denn die Ausdrücke (3.5.6–7) können dann ihren Sinn überhaupt verlieren. Insbesondere scheidet der Fall starrer Einschlüsse im Realkörper aus. Die Konvergenz des Verfahrens kann also gewährleistet werden, wenn die Begrenzungen von  $K^\circ$  und  $K^+$  zusammenfallen,  $K^+$  weder Löcher noch starre Einschlüsse enthält und (3.5.22) erfüllt ist. Dann ist es stets möglich, auch (3.5.21) zu erfüllen, wenn man nur  $K^\circ$  geeignet wählt.

Wir zeigen nun, wie man aus dem elastischen Zustand  $[f']$  des Grundkörpers, gegen den das Verfahren konvergiert, die gesuchte Lösung des Lastspannungsproblems im Realkörper  $K^+$  entnehmen kann. Entsprechend (2.6.5) oder (3.2.20) erfüllt  $[f']$  die Gleichung

$$[f'] = [f'^*] + \mathfrak{B}' [f'] \quad (3.5.23)$$

Schreibt man sie entsprechend der Definition (3.5.3–12) des Operators  $\mathfrak{B}'$  in den Dehnungs- und Spannungsfeldern

$$[\underline{\varepsilon}'] = \text{Def} [\underline{w}] \quad , \quad [\underline{\sigma}'] = \underline{c}^\circ \cdot \cdot \text{Def} [\underline{w}] \quad (3.5.24)$$

und berechnet beiderseits die Volumen- und Oberflächenkräfte, so findet man

$$\text{Div} (\underline{c}^\circ \cdot \cdot \text{Def} [\underline{w}]) = \text{Div} (\underline{c}^\circ \cdot \cdot \text{Def} [\underline{w}^*]) + \text{Div} (\underline{c}^- \cdot \cdot \text{Def} [\underline{w}]) \quad (3.5.25)$$

$$\underline{n} \cdot (\underline{c}^\circ \cdot \cdot \text{Def} [\underline{w}]) = \underline{n} \cdot (\underline{c}^\circ \cdot \cdot \text{Def} [\underline{w}^*]) + \underline{n} \cdot (\underline{c}^- \cdot \cdot \text{Def} [\underline{w}]) \quad (3.5.26)$$

oder mit (3.5.17–18) und (3.5.1), wenn man alle Glieder mit  $[\underline{w}]$  auf die linke Seite schafft,

$$\text{Div} (\underline{c}^+ \cdot \cdot \text{Def} [\underline{w}]) = - [\underline{p}] \quad (3.5.27)$$

$$\underline{n} \cdot (\underline{c}^+ \cdot \cdot \text{Def} [\underline{w}]) = [\underline{\mathfrak{P}}] \quad (3.5.28)$$

Das heißt aber, daß das Dehnungsfeld  $[\underline{\varepsilon}']$  genau das gesuchte Dehnungsfeld

im Realkörper  $K^+$  ist unter der gegebenen Belastung durch die Volumenkräfte  $[p]$  und die Oberflächenkräfte  $[\mathfrak{P}]$ . Das zugehörige Spannungsfeld im Realkörper  $K^+$  folgt daraus durch

$$[\tau]^+ = \mathfrak{e}^+ \cdot \cdot \text{Def} [\mathfrak{w}] \quad (3.5.29)$$

Damit ist die Konvergenz zur gesuchten Lösung gezeigt.

In Operatorform geschrieben heißt das Gleichungssystem (3.5.27–28) kurz (vgl. (2.6.1)ff.)

$$\mathfrak{A}' [f'] = [f'^*] \quad (3.5.30)$$

wo

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{E} - \mathfrak{B}' \quad (3.5.31)$$

nach der Voraussetzung (3.5.22) positiv definit ist. Das Problem (3.5.30) ist also aus einem Variationsproblem vom Typ (2.6.22) ableitbar, und die Konvergenz läßt sich nach den für diesen Sonderfall entwickelten Methoden verbessern. Wir gehen später (§ 5) noch ausführlicher darauf ein. Durch Einsetzen von (3.5.3–4, 6–7, 17–18) wird aus (3.5.25–26)

$$[r] = [p] + [q] \quad (3.5.32)$$

$$[\mathfrak{R}] = [\mathfrak{P}] + [\mathfrak{Q}] \quad (3.5.33)$$

Ein Vergleich mit (1.2.11) zeigt die formale Ähnlichkeit mit dem in § 1.2 beschriebenen Iterationsverfahren, welche sich leicht bis ins einzelne verfolgen läßt. Tatsächlich beruhen beide Verfahren auf gleichartigen physikalischen Überlegungen. Nur handelt es sich in § 1.2 gewissermaßen um einen Entartungsfall des hier behandelten Nichthomogenitätsproblems, bei dem die Elastizitätskonstanten in einem Teilgebiet des gleich dem Grundkörper als unendliche Scheibe gedachten Realkörpers völlig verschwinden, also um ein Randwertproblem für den Restbereich. Die Konvergenz dieses Randwertproblems wird in § 4 besonders untersucht werden.

Wir bemerken ferner, daß die Verschiebungen eine dem Spannungs- und Dehnungsfeld gleichwertige Repräsentation eines Lastspannungszustandes in  $K^0$  sind, und ebenso — bei Gültigkeit der hier stets vorausgesetzten Existenz- und Eindeutigkeitssätze für den Grundkörper — das System der Volumen- und Oberflächenkräfte. Im Prinzip läßt sich auch hier, wie wir das beim Randwertproblem bereits formuliert haben und im einzelnen noch weiter ausführen werden, die ganze Iteration in den Kräftesystemen allein ausführen; allerdings treten dabei Integraltransformationen mit singulärem Kern auf, für den sich zwar ein Hauptwert [122] physikalisch sinnvoll definieren läßt (vgl. den von Kroupa [53] behandelten analogen Fall der Dehnungskerne), aber für die numerische Berechnung noch einige Schwierigkeiten aufwirft. Wir verzichten hier darauf, auf diese Fragen näher einzugehen. Sie sind ohnehin gegenstandslos, wenn das Problem so einfach gestellt ist, daß die „halbnnumerische Iteration“, d. h. die Aufstellung einer Folge geschlossener Lösungen im Grundkörper möglich ist.

### 3.6 Iteration mit Eigenspannungszuständen (sukzessive Verspannung)

Gegeben sei wieder der Realkörper  $K^+$ ; im Gegensatz zu § 3.5 betrachten wir jetzt aber nicht seine Elastizitätskonstanten, sondern seine Elastizitätskoeffizienten  $g^+$ . Wieder wird dazu ein Grundkörper  $K^\circ$  derselben Form mit den Elastizitätskoeffizienten  $g^\circ$  gewählt; die elastische Energie sei sowohl im Grundkörper wie im Realkörper eigentlich positiv definit. Im Grundkörper seien außerdem Lösungen zu den Problemen 3.3.A und 3.3.C in dem für die folgenden Überlegungen notwendigen Umfang vorhanden und eindeutig bestimmt, was sich bei gewissen Voraussetzungen über die Oberflächenform stets erreichen läßt. Auch über die praktische Anwendbarkeit gilt das in § 3.5 Gesagte; wir bemerken noch, daß man durch Einführung einer fiktiven Extra-spannung und -dehnung im Realkörper  $K^+$  nach (3.3.46–47) mit  $g = g^+$  auch Lastspannungsprobleme in  $K^+$  mit dieser Methode behandeln kann, wenn man die Randbedingungen (3.3.45) gleich in  $\sigma^K$  mit berücksichtigt\*). Die weiteren Überlegungen folgen demselben Schema wie in § 3.5; wir unterstreichen diese Parallelen durch gleiche Numerierung entsprechender Formeln. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf einfach zusammenhängende Körper, so daß wir die Anteile *Volterrascher* Distorsionszustände nicht zu berücksichtigen brauchen.

Nun konstruieren wir einen Operator  $\mathfrak{B}''$  im Unterraum der Eigenspannungszustände  $f''$  des Zustandsraums (vgl. (3.4.3)) mit Hilfe eines Differenzkörpers  $K^-$  mit den Elastizitätskoeffizienten

$$\underline{g}^- = \underline{g}^\circ - \underline{g}^+ \quad (3.6.1)$$

Wieder mag in diesem Differenzkörper die elastische Energie positiv, Null oder negativ sein; er braucht also nicht einem physikalisch realisierbaren Körper zu entsprechen. Sei nun  $f''^0$  ein beliebiger Eigenspannungszustand im Grundkörper  $K^\circ$ , repräsentiert durch

$$\sigma''^0 = \text{Ink } \chi^0, \quad \varepsilon''^0 = \underline{g}^\circ \cdot \cdot \text{Ink } \chi^0 \quad (3.6.2)$$

und es sei

$$\text{Ink } (\underline{g}^\circ \cdot \cdot \text{Ink } \chi^0) = \eta^0 \quad (3.6.3)$$

$$n \cdot \text{Ink } \chi^0 = 0 \quad (3.6.4)$$

Dann definieren wir einen neuen Eigenspannungszustand in  $K^\circ$

$$f''^1 = \mathfrak{B}'' f''^0 \quad (3.6.5)$$

indem wir zunächst dem Differenzkörper  $K^-$  die Spannung  $\text{Ink } \chi^0$  aufzwingen; hierzu sind in  $K^-$  die Inkompatibilitäten

$$\stackrel{(-)}{\eta}^0 = \text{Ink } (\underline{g}^- \cdot \cdot \text{Ink } \chi^0) \quad (3.6.6)$$

erforderlich. Eine zu (3.5.7) analoge Gleichung entfällt, da wir die Oberfläche  $S_\circ$  als frei und unbelastet voraussetzen. Nun bringen wir die Inkompatibilitäten (3.6.6) in  $K^\circ$  an, setzen also

$$\eta^1 = \stackrel{(-)}{\eta}^0 \quad (3.6.8)$$

\*) Vgl. Fußnote S. 176, (3.3.52 a) sowie (3.6.33–37).

Damit bestimmen sich die Repräsentationen des neuen Eigenspannungszustandes (3.6.5)

$$\underline{\sigma}''^1 = \text{Ink } \underline{\chi}^1, \quad \underline{\varepsilon}''^1 = \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^1 \quad (3.6.10)$$

aus der Lösung des Randwert- und Summationsproblems

$$\text{Ink } (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^1) = \eta^1 \quad (3.6.11)$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^1 = 0 \quad (3.6.12)$$

Die Linearität dieses Operators ist wie in § 3.2 und § 3.5 leicht nachzuprüfen; bei der Prüfung auf Symmetrie beschränken wir uns auf den Unterraum der Eigenspannungszustände im Zustandsraum, in welchem  $\mathfrak{B}''$  ausschließlich erklärt ist. Seien also  $\hat{f}''^0$  und  $\hat{f}''^1$  zwei beliebige Eigenspannungszustände im Grundkörper  $K^\circ$ , so erhalten wir durch Anwendung der Gleichung (3.4.28) von Satz 4, § 3.4, zunächst im Grundkörper und sodann in umgekehrter Reihenfolge im Differenzkörper unter Berücksichtigung von (3.6.3–12)

$$\begin{aligned} \{\hat{f}''^0, \mathfrak{B}'' \hat{f}''^0\} &= \{\hat{f}''^0, \hat{f}''^1\} = \int_{(V_s)} \text{Ink } \hat{\chi}^0 \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Ink } \hat{\chi}^1 dV \\ &= - \oint_{(S_s)} \hat{\mathfrak{Q}}^0 \cdot \hat{\eta}^1 \cdot \mathbf{n} d\mathbf{f} + \int_{(V_s)} \hat{\chi}^0 \cdot \cdot \hat{\eta}^1 dV = - \oint_{(S_s)} \hat{\mathfrak{Q}}^0 \cdot \hat{\eta}^0 \cdot \mathbf{n} d\mathbf{f} + \int_{(V_s)} \hat{\chi}^0 \cdot \cdot \hat{\eta}^0 dV \\ &= \int_{(V_s)} \text{Ink } \hat{\chi}^0 \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^- \cdot \cdot \text{Ink } \hat{\chi}^0 dV \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

woraus man wegen der Symmetrieeigenschaften (3.1.11) von  $\underline{\varepsilon}^-$  leicht abliest

$$\{\hat{f}''^0, \mathfrak{B}'' \hat{f}''^0\} = \{\hat{f}''^0, \mathfrak{B}'' \hat{f}''^1\} \quad (3.6.14)$$

Das bedeutet aber nach (2.4.45) Symmetrie des Operators  $\mathfrak{B}''$  im Unterraum der Eigenspannungszustände.

Nun definieren wir eine Iterationsfolge des Typs (2.6.6)

$$[f'']^{n+1} = [f'']^* + \mathfrak{B}'' [f'']^n \quad (3.6.15)$$

wo  $[f'']^*$  bestimmt ist durch die Repräsentationen

$$[\underline{\sigma}''^*] = \text{Ink } [\underline{\chi}^*], \quad [\underline{\varepsilon}''^*] = \underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Ink } [\underline{\chi}^*] \quad (3.6.16)$$

welche die Gleichungen

$$\text{Ink } (\underline{\varepsilon}^\circ \cdot \cdot \text{Ink } [\underline{\chi}^*]) = [\eta]^{(+)} \quad (3.6.17)$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^* = 0 \quad (3.6.18)$$

erfüllen. Die Inkompatibilität  $[\eta]^{(+)}$  stellt das gegebene System von Eigenspannungsquellen dar, zu welchem das Spannungsfeld im Realkörper  $K^+$  gesucht ist.

Ein hinreichendes Konvergenzkriterium erhält man aus ähnlichen Überlegungen wie in § 3.2 und § 3.5. Zunächst führt nach (3.6.13) eine den Abschätzungen (3.2.9–13) analoge Schlußweise auf das Konvergenzkriterium

$$\limsup \left| \frac{\text{Ink } \underline{\chi} \cdots \underline{s}^- \cdots \text{Ink } \underline{\chi}}{\text{Ink } \underline{\chi} \cdots \underline{s}^\circ \cdots \text{Ink } \underline{\chi}} \right| < 1 \quad (3.6.19)$$

wo  $\underline{\chi}$  ein beliebig variables Spannungsfunktionentensorfeld ist. Nun ist die Menge aller Spannungen  $\text{Ink } \underline{\chi}$ , die die homogenen Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, sicher enthalten in der Menge aller Spannungen  $\underline{\sigma}$ , die keiner Einschränkung unterliegen. Es gilt somit

$$\limsup \left| \frac{\text{Ink } \underline{\chi} \cdots \underline{s}^- \cdots \text{Ink } \underline{\chi}}{\text{Ink } \underline{\chi} \cdots \underline{s}^\circ \cdots \text{Ink } \underline{\chi}} \right| \leq \limsup \left| \frac{\underline{\sigma} \cdots \underline{s}^- \cdots \underline{\sigma}}{\underline{\sigma} \cdots \underline{s}^\circ \cdots \underline{\sigma}} \right| \quad (3.6.20)$$

Damit erhält man das einfachere, allerdings auch schwächere Konvergenzkriterium

$$\limsup \left| \frac{\underline{\sigma} \cdots \underline{s}^- \cdots \underline{\sigma}}{\underline{\sigma} \cdots \underline{s}^\circ \cdots \underline{\sigma}} \right| < 1 \quad (3.6.21)$$

Nach (3.6.1) ist die Erfüllung dieses Konvergenzkriteriums nur dann möglich, wenn die elastische Energie im Realkörper  $K^+$  eigentlich positiv definit ist, also

$$\liminf \frac{\underline{\sigma} \cdots \underline{s}^+ \cdots \underline{\sigma}}{\underline{\sigma} \cdots \underline{s}^\circ \cdots \underline{\sigma}} > 0, \quad \limsup \frac{\underline{\sigma} \cdots \underline{s}^+ \cdots \underline{\sigma}}{\underline{\sigma} \cdots \underline{s}^\circ \cdots \underline{\sigma}} < \infty \quad (3.6.22)$$

gilt. Dann läßt sich aber auch immer ein Grundkörper der Art finden, daß der zugehörige Differenzkörper das Kriterium (3.6.21) erfüllt. Die im Normalfall beste Wahl von  $K^\circ$  ergibt sich dann aus der Forderung, daß die obere und die untere Grenze des Bruchs in (3.6.22) denselben Betrag haben sollen; allerdings sind Abweichungen von dieser Regel sehr wohl denkbar, z. B. wenn der Realkörper nur in einem relativ kleinen Gebiet vom Grundkörper verschieden ist. Läßt sich dagegen keine positive untere Schranke für (3.6.22) angeben, so wird der Konvergenzbeweis wie im entsprechenden Fall von § 3.5 in dieser einfachen Form hinfällig. Das ist z. B. der Fall, wenn  $\underline{s}^+$  im Volumen  $V_0$  stellenweise ganz verschwindet und insbesondere, wenn der Realkörper  $K^+$  starre Einschlüsse enthält. Dann scheitert der Konvergenzbeweis bereits an dem mit (3.6.20) verbundenen Genauigkeitsverlust, und man muß zusätzlich noch die eindeutige Lösbarkeit des ersten Randwertproblems (Oberflächenverschiebungen gegeben) für den nicht-starren Teil von  $K^+$  in die Voraussetzungen aufnehmen, entsprechend den bis auf eine starre Bewegung festgelegten Verschiebungen der Starrheitsgebiete. Und schließlich müssen dann Eigenspannungsquellen in den Starrheitsgebieten ausgeschlossen werden (§ 4). Auf eine eingehende Behandlung derartiger und ähnlicher Grenzfälle verzichten wir jedoch an dieser Stelle. Wächst dagegen  $\underline{s}^+$  irgendwo in  $V_0$  über alle Grenzen, wie es z. B. einem Hohlraum oder einer gegenüber  $K^\circ$  verkleinerten Begrenzung von  $K^+$  entspricht, so verliert der Ausdruck (3.6.6) im allgemeinen überhaupt seinen Sinn, und der Konvergenzbeweis muß ver-

sagen. Die Konvergenz des Verfahrens kann also gewährleistet werden, wenn die Begrenzungen von  $K^\circ$  und  $K^+$  zusammenfallen,  $K^+$  weder starre Einschlüsse noch Löcher aufweist und (3.6.22) erfüllt ist. Dann ist es stets möglich, auch (3.5.21) zu erfüllen, wenn man nur  $K^\circ$  geeignet wählt.

Wir zeigen nun, wie man aus dem elastischen Zustand des Grundkörpers, gegen den das Verfahren konvergiert, die gesuchte Lösung des Eigenwertproblems im Realkörper  $K^+$  entnehmen kann. Entsprechend (2.6.5) oder (3.2.20) erfüllt  $[f'']$  die Gleichung

$$[f''] = [f''^*] + \mathfrak{B}'' [f''] \quad (3.6.23)$$

Schreibt man sie entsprechend der Definition (3.6.3–12) des Operators  $\mathfrak{B}''$  in den Spannungs- und Dehnungsfeldern

$$[\underline{\sigma}''] = \text{Ink } [\underline{\chi}], \quad [\underline{\varepsilon}''] = \underline{s}^\circ \cdot \text{Ink } [\underline{\chi}] \quad (3.6.24)$$

und berechnet beiderseits die Inkompatibilitäten, so findet man

$$\text{Ink } (\underline{s}^\circ \cdot \text{Ink } [\underline{\chi}]) = \text{Ink } (\underline{s}^\circ \cdot \text{Ink } [\underline{\chi}^*]) + \text{Ink } (\underline{s}^- \cdot \text{Ink } [\underline{\chi}]) \quad (3.6.25)$$

$$n \cdot \text{Ink } [\underline{\chi}] = n \cdot \text{Ink } [\underline{\chi}^*] = 0 \quad (3.6.26)$$

oder mit (3.6.17–18) und (3.6.1), wenn man alle Glieder mit  $[\underline{\chi}]$  auf die linke Seite schafft

$$\text{Ink } (\underline{s}^+ \cdot \text{Ink } [\underline{\chi}]) = \overset{(+)}{[\underline{y}]} \quad (3.6.27)$$

$$n \cdot \text{Ink } [\underline{\chi}] = 0 \quad (3.6.28)$$

Das heißt aber, daß das Spannungsfeld  $[\underline{\sigma}'']$  genau das gesuchte Spannungsfeld im Realkörper  $K^+$  ist, welches bei freier und unbelasteter Oberfläche von der gegebenen Inkompatibilität  $\overset{(+)}{[\underline{y}]}$  darin hervorgerufen wird. Das zugehörige elastische Dehnungsfeld im Realkörper  $K^+$  folgt daraus durch

$$\overset{+}{[\underline{\gamma}]} = \underline{s}^+ \cdot \text{Ink } [\underline{\chi}] \quad (3.6.29)$$

Damit ist die Konvergenz zur gesuchten Lösung gezeigt.

In Operatorform geschrieben heißt das Gleichungssystem (3.6.27–28) kurz (vgl. (2.6.1) ff.)

$$\mathfrak{A}'' [f''] = [f''^*] \quad (3.6.30)$$

wo

$$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{C} - \mathfrak{B}'' \quad (3.6.31)$$

nach der Voraussetzung (3.6.22) positiv definit ist. Wir schließen daraus wieder wie in § 3.5 auf die Ableitbarkeit von (3.6.30) aus einem Variationsproblem vom Typ (2.6.22); dieses Variationsproblem wurde wohl von *Colonnetti* erst mals formuliert ([27], § 14; [127]) und entspricht etwa dem aus dem *Castiglianoschen* Prinzip abgeleiteten Variationsproblem [1, 2, 71, 119], wenn man es durch einen Term ergänzt, der die Eigenspannungsquellen enthält [109]. Auch hier sind die für diesen Fall entwickelten Konvergenzverbesserungen



runzungsmethoden anwendbar (§ 5). Durch Einsetzen von (3.6.3–4, 6, 17–18) wird aus (3.6.25–26)

$$[\eta] = \overset{(+)}{[\eta]} + \overset{(-)}{[\eta]} \quad (3.6.32)$$

Auch hier erkennt man wieder die formale Ähnlichkeit mit den Iterationsverfahren von § 1.2 und § 1.3; tatsächlich beruht das Iterationsverfahren von § 1.3 auf demselben physikalischen Grundgedanken der sukzessiven Verspannung, d. h. der stufenweisen Einführung von Eigenspannungsquellen im Grundkörper. Man kann das Randwertproblem von § 1.3 als einen Entartungsfall des hier behandelten Nichthomogenitätsproblems auffassen, bei dem die Elastizitätskoeffizienten in einem Teilgebiet des gleich dem Grundkörper als unendliche Scheibe aufgefaßten Realkörper völlig verschwinden; d. h. der Realkörper ist bis auf den für das vorgelegte Randwertproblem allein interessanten Restbereich völlig erstarrt. Die vorgeschriebenen Oberflächenverschiebungen (und Verschiebungsableitungen bei Platten) ergeben sich dann aus einer Versetzungsbelegung in der Grenzfläche bzw. Grenzlinie zwischen dem elastischen und dem starren Bereich von  $K^+$  ([27], § 9, 15). Die Konvergenz dieses Verfahrens ergibt sich aus Überlegungen, wie sie für das zweite Randwertproblem in § 4 durchgeführt werden. Für die erste Randwertaufgabe hat man lediglich die dort eingeführten Operatoren umzudeuten (vgl. § 4.6.).

Wir bemerken ferner, daß die Spannungsfunktionen eine dem Spannungs- und Dehnungsfeld gleichwertige Repräsentation eines Eigenspannungszustandes in  $K^\circ$  sind und ebenso — bei Gültigkeit der hier stets vorausgesetzten Existenz- und Eindeutigkeitssätze für den Grundkörper — das System der Inkompatibilitäten. Im Prinzip läßt sich das Iterationsverfahren auch in den Inkompatibilitäten oder in den Versetzungsichten [27] allein ausführen, wobei wieder Integraltransformationen mit singulärem Kern auftreten (§ 3.5, Schluß). Wie in § 3.5 gehen wir hier nicht auf die Fragen ein, die mit der praktischen Lösung der Probleme in  $K^\circ$  zusammenhängen. Die Überlegungen dieser Ziffer gelten ebensowohl für rein numerische Lösungen als auch für Folgen geschlossener Lösungen im Grundkörper.

Zum Schluß noch einige Bemerkungen zu der Frage, in welchen Fällen die Iteration mit Lastspannungszuständen und in welchen Fällen die Iteration mit Eigenspannungszuständen vorzuziehen ist. Nach beiden Methoden können sowohl Lastspannungs- als auch Eigenspannungsprobleme behandelt werden, und beide Methoden lassen sich nach (3.3.30–52) wahlweise mit Verschiebungs- oder Spannungsfunktionen durchführen. Von der Seite des mathematischen Aufwandes besteht also kein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Verfahren; nur die Aufstellung der Ausgangswerte kann einige zusätzliche Arbeit machen. Will man z. B. ein Eigenspannungsproblem mit Verschiebungsfunktionen lösen, und sind nur Inkompatibilitäten oder Versetzungsichten gegeben, so muß man daraus zuvor durch Integration eine Extradehnung berechnen [27, 98]. Ebenso muß man durch Integration eine fiktive Extraspannung vorweg bestimmen, wenn man ein Lastspannungsproblem mit Spannungsfunktionen — oder überhaupt als fiktives Eigenspannungsproblem — behandeln will. Diese Integrationen sind jedoch meist relativ einfach.

Als Beispiel betrachten wir die Bestimmung einer fiktiven Extraspannung  $[\underline{\sigma}^K]$ , wobei wir darin auch nach der Fußnote von S. 176 die Randbedingungen berücksichtigen. Zunächst benötigt man eine Partikularlösung  $[\underline{\sigma}^{K*}]$  der Gleichung (3.3.46)

$$\text{Div } [\underline{\sigma}^{K*}] = \mathfrak{p} \quad (3.6.33)$$

Nun denken wir uns auf der rechten Seite von (3.6.27) die im folgenden zu bestimmende fiktive Inkompatibilität eingesetzt; die zugehörige Lösung von (3.6.27–28) bezeichnen wir wieder mit  $[\underline{\chi}^K]$ . Dann wird aus (3.3.45) wegen (3.6.28)

$$\mathfrak{n} \cdot [\underline{\sigma}^G] = \mathfrak{n} \cdot (\text{Ink } [\underline{\chi}^K] - [\underline{\sigma}^K]) = -\mathfrak{n} \cdot [\underline{\sigma}^K] = \mathfrak{P} \quad (3.6.34)$$

Setzt man zur Erfüllung der Randbedingungen an

$$[\underline{\sigma}^K] = [\underline{\sigma}^{K*}] + \text{Ink } [\underline{\chi}^K] \quad (3.6.35)$$

so erhält man für  $[\underline{\chi}^K]$  die Randbedingungen

$$\mathfrak{n} \cdot \text{Ink } [\underline{\chi}^K] = -\mathfrak{P} - \mathfrak{n} \cdot [\underline{\sigma}^{K*}] \quad (3.6.36)$$

Dies ergibt gewisse Vorschriften für  $[\underline{\chi}^K]$  und einen Teil seiner Normalableitungen auf der Oberfläche [98, 116, 126]; im Falle der Airyschen Spannungsfunktion sind diese allgemein bekannt [1–6]. Im Inneren von  $V_0$  muß  $[\underline{\chi}^K]$  zweimal differenzierbar sein, kann aber im übrigen beliebig gewählt werden, da sich die willkürlichen Anteile von  $[\underline{\sigma}^K]$  nach (3.3.50) herausheben. Nach (3.3.47) findet man nun aus (3.6.35) die fiktive Extradrehung

$$[\underline{\varepsilon}^K] = -\underline{\varepsilon}^+ \cdot \cdot [\underline{\sigma}^K] \quad (3.6.37)$$

und daraus nach (3.3.28) die fiktive Inkompatibilität, die man jetzt für  $[\underline{\eta}]$  in (3.6.17, 27) einzusetzen hat.

Praktisch wird man sich bemühen, mit  $[\underline{\sigma}^K]$  bereits der negativ genommenen Lösung des Problems möglichst nahe zu kommen; dann fällt die anschließende Lösung des fiktiven Eigenspannungsproblems zahlenmäßig weniger ins Gewicht.

Will man dagegen Eigenspannungsprobleme mit Verschiebungsfunktionen behandeln, so führt man nach (3.3.39) die Quasi-Volumenkräfte

$$[\mathfrak{p}^Q] = -\text{Div } (\underline{\varepsilon}^+ \cdot \cdot [\underline{\varepsilon}^Q]) \quad (3.6.38)$$

und nach (3.3.45a, b) die Quasi-Oberflächenkräfte

$$[\mathfrak{P}^Q] = \mathfrak{n} \cdot (\underline{\varepsilon}^+ \cdot \cdot [\underline{\varepsilon}^Q]) \quad (3.6.39)$$

auf der rechten Seite von (3.5.17–18) ein.

Von der Seite der praktischen Lösungsverfahren betrachtet, also nach dem mathematischen oder numerischen Aufwand für einen Iterationsschritt beurteilt, ist der Unterschied zwischen der Methode der sukzessiven Belastung und der sukzessiven Verspannung somit gering oder überhaupt nicht vorhanden. Auch die Konvergenzkriterien (3.5.21) und (3.6.21) liefern, wie sich

aus den Überlegungen von § 3.8 leicht ableiten lassen wird, stets dasselbe Ergebnis, wenn man den Grundkörper so wählt, daß die obere und die untere Grenze dieser Brüche dem Betrage nach gleich sind. Dies muß jedoch nicht immer die zweckmäßigste Wahl des Grundkörpers sein. Es kann etwa (z. B. bei einem „Pflasterproblem“ [128]) sein, daß der Realkörper bis auf ein relativ kleines Ausnahmegebiet homogen und isotrop ist. Dann wird man den homogenen und isotropen Grundkörper im allgemeinen am besten so wählen, daß er bis auf das Ausnahmegebiet (z. B. das „Pflaster“) mit dem Realkörper übereinstimmt. Läßt sich damit gleichzeitig wenigstens eine der Bedingungen (3.5.21) oder (3.6.21) erfüllen, so ist die Konvergenz des entsprechenden Iterationsverfahrens gewährleistet. Falls aber bei dieser Wahl des Grundkörpers keines dieser beiden Kriterien erfüllt werden kann, besteht noch die Möglichkeit, nach der in der folgenden Ziffer entwickelten „gemischten“ oder „kombinierten“ Methode zu iterieren. Wie sich zeigen wird, kann man mit dieser gemischten Methode in jedem Fall günstigere Konvergenzabschätzungen erhalten. Dafür muß man allerdings in Kauf nehmen, daß der zugehörige Operator nicht mehr symmetrisch ist, was die Anwendung von Konvergenzverbesserungsverfahren erschwert.

### 3.7 Gemischte Iteration (sukzessive Belastung und Verspannung)

Wir haben in den beiden letzten Ziffern die Prinzipien der sukzessiven Belastung und der sukzessiven Verspannung auf Nichthomogenitätsprobleme angewandt. Nun könnte man sich eine Kombination beider Methoden so vorstellen, daß man die Definition der beiden symmetrischen Operatoren  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$  nach (3.5.5) und (3.6.5) auf den ganzen Funktionenraum erweitert durch

$$\mathfrak{B}' f'' = \mathfrak{B}'' f' = 0 \quad (3.7.1)$$

Dann erfüllen beide Operatoren die Voraussetzungen der Sätze 3 und 4 von § 2.5, und die Iterationen in Lastspannungszuständen und in Eigenspannungszuständen vollziehen sich völlig unabhängig voneinander. Das heißt nichts weiter, als daß man gleichzeitig ein Lastspannungsproblem nach der einen und ein Eigenspannungsproblem nach der anderen Methode lösen kann, ohne daß die beiden Rechnungen einander beeinflussen.

Zweckmäßig ist dieses Verfahren nicht. Wir haben gesehen, daß man sowohl bei der Iteration mit Lastspannungszuständen wie bei der Iteration mit Eigenspannungszuständen die Wahl hat zwischen Verschiebungs- und Spannungsfunktionsmethoden. Will man z. B. die Methode der Spannungsfunktionen bei der Iteration mit Lastspannungszuständen anwenden, so hat man an die Stelle von (3.5.6–9) nur zu setzen

$$\sigma^{K_1} = - \underline{c}^{-1} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}^{G_0} \quad (3.7.2)$$

und nach (3.3.46–52) weiterzurechnen. Führt man dagegen die Iteration mit Eigenspannungszuständen nach der Methode der Verschiebungsfunktionen durch, so setzt man an die Stelle von (3.6.6–8)

$$\underline{\varepsilon}^{Q_1} = - \underline{s}^{-1} \cdot \cdot \sigma^{G_1} \quad (3.7.3)$$

und rechnet nach (3.3.34–45) mit den daraus abgeleiteten Quasi-Kräften weiter. Da man außerdem jedes vorgelegte Lastspannungsproblem formal in ein Eigenspannungsproblem überführen kann und umgekehrt (§ 3.6, Schluß), kann man jede beliebige Aufgabe im Realkörper  $K^+$  nach einer einheitlichen Methode iterativ behandeln; gleichzeitige Anwendung zweier Methoden führt nur auf unnötige Doppelarbeit.

Allerdings erlauben die Konvergenzkriterien (3.5.21) und (3.6.21) nicht immer die zweckmäßigste Wahl des Grundkörpers (§ 3.6, Schluß), falls man sich nicht etwa durch Anwendung eines Konvergenzverbesserungsverfahrens (§ 5) von diesen Voraussetzungen freimachen will. Wir entwickeln deshalb hier noch ein anderes, gemischtes Verfahren, dessen Konvergenz für jede beliebige Wahl des Grundkörpers  $K^\circ$  gesichert ist, solange nur die elastische Energie im Realkörper eigentlich positiv definit ist, also die Ungleichungen (3.5.22) und (3.6.22) zutreffen. Dieses gemischte Verfahren zeichnet sich weiterhin dadurch aus, daß die im Verlaufe der Iteration auftretenden Ausdrücke auch dann noch ihren Sinn behalten, wenn in den linken Ungleichungen von (3.5.22) und (3.6.22) stellenweise das Gleichheitszeichen auftritt, also beispielsweise, wenn der Realkörper  $K^+$  gleichzeitig Hohlräume und starre oder inkompressible Einschlüsse enthält. Allerdings erfordert dann die Frage der Konvergenz zusätzliche Überlegungen, auf die wir hier nicht eingehen wollen. In der nächsten Ziffer werden wir erkennen, daß sich bei geeigneter Wahl des Grundkörpers mit diesem gemischten Verfahren auf alle Fälle eine günstigere Konvergenzabschätzung erzielen läßt als mit den beiden Verfahren von § 3.5 und § 3.6. Dafür müssen wir allerdings in Kauf nehmen, daß der Operator des gemischten Iterationsverfahrens nicht mehr symmetrisch ist.

Wir gehen von einem gegebenen Realkörper  $K^+$  aus mit den Elastizitätskonstanten und -koeffizienten  $\underline{c}^+$  und  $\underline{s}^+$ ; seine elastische Energie sei eigentlich positiv definit, es mögen also die Ungleichungen (3.5.22) und (3.6.22) gelten für einen beliebig gewählten Grundkörper  $K^\circ$  mit den Elastizitätskonstanten und -koeffizienten  $\underline{c}^\circ$  und  $\underline{s}^\circ$  und eigentlich positiv definiter elastischer Energie. Nun definieren wir für einen vorgegebenen Realkörper  $K^+$  und einen vorgegebenen Grundkörper  $K^\circ$  einen „Weichkörper“  $K^w$  mit den Elastizitätskonstanten und -koeffizienten  $\underline{c}^w$  und  $\underline{s}^w$  sowie einen „Hartkörper“  $K^h$  mit den Elastizitätskonstanten und -koeffizienten  $\underline{c}^h$  und  $\underline{s}^h$  auf die folgende Weise.

Zunächst mögen überall in dem für alle vorkommenden Körper kongruenten Bereich  $V_\circ$  und für jedes beliebige nicht identisch verschwindende Dehnungsfeld  $\underline{\varepsilon}$  oder Spannungsfeld  $\underline{\sigma}$  die Abschätzungen gelten

$$0 < \underline{\varepsilon} \cdots \underline{c}^w \cdots \underline{\varepsilon} \leq \underline{\varepsilon} \cdots \underline{c}^\circ \cdots \underline{\varepsilon} \quad (3.7.4)$$

$$0 < \underline{\sigma} \cdots \underline{s}^h \cdots \underline{\sigma} \leq \underline{\sigma} \cdots \underline{s}^\circ \cdots \underline{\sigma} \quad (3.7.5)$$

sowie die Gleichungen

$$\underline{c}^w + \underline{c}^h - \underline{c}^\circ = \underline{c}^w \cdots \underline{s}^\circ \cdots \underline{c}^h = \underline{c}^h \cdots \underline{s}^\circ \cdots \underline{c}^w = \underline{c}^+ \quad (3.7.6)$$

$$\underline{s}^w + \underline{s}^h - \underline{s}^\circ = \underline{s}^w \cdots \underline{c}^\circ \cdots \underline{s}^h = \underline{s}^h \cdots \underline{c}^\circ \cdots \underline{s}^w = \underline{s}^+ \quad (3.7.7)$$

Sowohl der Weichkörper  $K^w$  wie der Hartkörper  $K^h$  sind stets vorhanden und durch (3.7.4–7) eindeutig bestimmt. Evident ist dies, wenn im ganzen Bereich  $V$  entweder  $\underline{c}^w = \underline{c}^\circ = \underline{c}^+$ ,  $\underline{s}^h = \underline{s}^\circ = \underline{s}^+$  (Grundgebiet) oder  $\underline{c}^w = \underline{c}^+$ ,  $\underline{s}^h = \underline{s}^\circ$  (Erweichungsgebiet) oder  $\underline{c}^w = \underline{c}^\circ$ ,  $\underline{s}^h = \underline{s}^+$  (Verhärtungsgebiet) ist (Abb. 3.7.1). Für den allgemeinen Fall wird die Existenz und Eindeutigkeit von  $K^w$  und  $K^h$  an Hand einer allgemeinen Methode zu ihrer Berechnung in der nächsten Ziffer nachgewiesen.

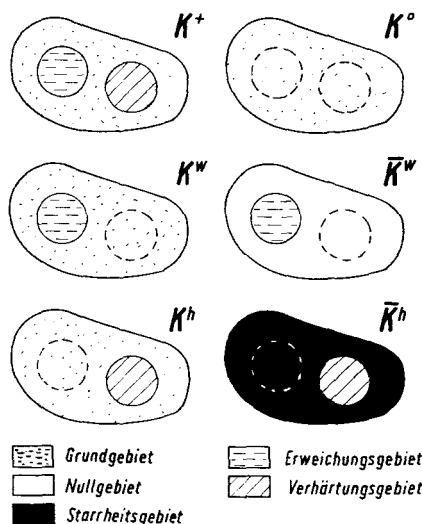


Abb. 3.7.1. Realkörper und Vergleichskörper im allgemeinen Fall

Weiter definieren wir einen „Weichdifferenzkörper“  $\bar{K}^w$  und einen „Hartdifferenzkörper“  $\bar{K}^h$  durch

$$\underline{c}^{\bar{w}} = \underline{c}^\circ - \underline{c}^w \quad (3.7.8)$$

$$\underline{s}^{\bar{h}} = \underline{s}^\circ - \underline{s}^h \quad (3.7.9)$$

Im Gegensatz zu den Differenzkörpern von § 3.5 und § 3.6 besitzen  $\bar{K}^w$  und  $\bar{K}^h$  eine nicht-negativ definite elastische Energie, denn aus (3.7.4–5, 8–9) folgt

$$0 \leq \underline{\varepsilon} \cdots \underline{c}^{\bar{w}} \cdots \underline{\varepsilon} < \underline{\varepsilon} \cdots \underline{c}^\circ \cdots \underline{\varepsilon} \quad (3.7.10)$$

$$0 \leq \underline{\sigma} \cdots \underline{s}^{\bar{h}} \cdots \underline{\sigma} < \underline{\sigma} \cdots \underline{s}^\circ \cdots \underline{\sigma} \quad (3.7.11)$$

Ferner gilt

$$\underline{c}^{\bar{w}} \cdots \underline{s}^{\bar{h}} = 0, \quad \underline{s}^{\bar{h}} \cdots \underline{c}^{\bar{w}} = 0 \quad (3.7.12)$$

Auch diese Beziehung ist im Falle der Abb. 3.7.1 evident und wird in der nächsten Ziffer allgemein bewiesen werden.

Nun sei

$$f^0 = f'^0 + f''^0 \quad (3.7.13)$$

ein beliebiger elastischer Zustand des Grundkörpers  $K^\circ$  mit dem Lastspannungsanteil  $f^0$  und dem Eigenspannungsanteil  $f''^0$ . Die zugehörigen Repräsentationen sind also

$$\varepsilon^0 = \text{Def } w^0 + \varepsilon^\circ \cdot \cdot \text{Ink } \chi^0 \quad (3.7.14)$$

$$\sigma^0 = \varepsilon^\circ \cdot \cdot \text{Def } w^0 + \text{Ink } \chi^0 \quad (3.7.15)$$

und für die Anteile  $f^0$  und  $f''^0$

$$\varepsilon'^0 = \text{Def } w^0, \quad \sigma'^0 = \varepsilon^\circ \cdot \cdot \text{Def } w^0 \quad (3.7.16)$$

$$\sigma''^0 = \text{Ink } \chi^0, \quad \varepsilon''^0 = \varepsilon^\circ \cdot \cdot \text{Ink } \chi^0 \quad (3.7.17)$$

Ferner gelte

$$\text{Div } (\varepsilon^\circ \cdot \cdot \text{Def } w^0) = -r^0 \quad (3.7.18)$$

$$n \cdot (\varepsilon^\circ \cdot \cdot \text{Def } w^0) = \mathfrak{R}^0 \quad (3.7.19)$$

$$\text{Ink } (\varepsilon^\circ \cdot \cdot \text{Ink } \chi^0) = \eta^0 \quad (3.7.20)$$

$$n \cdot \text{Ink } \chi^0 = 0 \quad (3.7.21)$$

Jetzt definieren wir einen Operator  $\mathfrak{C}^w$  durch

$$f^1 = \mathfrak{C}^w f^0 \quad (3.7.22)$$

indem wir zunächst dem Weichdifferenzkörper  $\bar{K}^w$  die Dehnung  $\varepsilon^0$  nach (3.7.14) aufzwingen. Dazu werden — neben der Inkompatibilität  $\eta^0$  nach (3.7.20), die hier nicht interessiert — die folgenden Volumen- und Oberflächenkräfte benötigt

$$q^0 = -\text{Div } (\varepsilon^w \cdot \cdot \varepsilon^0) \quad (3.7.23)$$

$$\mathfrak{Q}^0 = n \cdot (\varepsilon^w \cdot \cdot \varepsilon^0) \quad (3.7.24)$$

Jetzt bringen wir dieses Kräftesystem im Grundkörper  $K^\circ$  an, setzen also

$$r^1 = q^0 \quad (3.7.25)$$

$$\mathfrak{R}^1 = \mathfrak{Q}^0 \quad (3.7.26)$$

Dann bestimmen sich die Repräsentationen des Lastspannungszustandes  $f^1$  in  $K^\circ$

$$\varepsilon'^1 = \text{Def } w^1, \quad \sigma'^1 = \varepsilon^\circ \cdot \cdot \text{Def } w^1 \quad (3.7.27)$$

aus der Lösung des Summations- und Randwertproblems

$$\text{Div } (\varepsilon^\circ \cdot \cdot \text{Def } w^1) = -r^1 \quad (3.7.28)$$

$$n \cdot (\varepsilon^\circ \cdot \cdot \text{Def } w^1) = \mathfrak{R}^1 \quad (3.7.29)$$

Der Operator  $\mathfrak{C}^w$  ist zweifellos linear; symmetrisch kann er jedoch — mit der trivialen Ausnahme  $\varepsilon^w \equiv 0$  — nach (2.5.48) ff. nicht sein, da sein Bildraum ganz im Unterraum der Lastspannungszustände enthalten ist, während sein Definitionsbereich ohne Nullraum auch den Unterraum der Eigenspannungszustände wenigstens teilweise mit umfaßt.

Als nächstes definieren wir einen Operator  $\mathfrak{E}^h$  durch

$$f'^1 = \mathfrak{E}^h f^0 \quad (3.7.30)$$

indem wir zunächst dem Hartdifferenzkörper  $\bar{K}^h$  die Spannung  $\sigma^0$  nach (3.7.15) aufzwingen. Dazu wird — neben dem Kräftesystem  $r^0$ ,  $\mathfrak{R}^0$  nach (3.7.18–19), das hier nicht interessiert — die folgende Inkompatibilität benötigt

$$\overset{(-)}{\eta}^0 = \text{Ink } (\bar{s}^h \cdot \cdot \sigma^0) \quad (3.7.31)$$

Jetzt bringen wir diese Inkompatibilität im Grundkörper  $K^\circ$  an, setzen also

$$\eta^1 = \overset{(-)}{\eta}^0 \quad (3.7.32)$$

Dann bestimmen sich die Repräsentationen des Eigenspannungszustandes  $f'^1$  in  $K^\circ$

$$\underline{\sigma}''^1 = \text{Ink } \underline{\chi}^1, \quad \underline{\varepsilon}''^1 = \underline{s}^\circ \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^1 \quad (3.7.33)$$

aus der Lösung des Summations- und Randwertproblems

$$\text{Ink } (\underline{s}^\circ \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^1) = \eta^1 \quad (3.7.34)$$

$$n \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^1 = 0 \quad (3.7.35)$$

Auch der Operator  $\mathfrak{E}^h$  ist zweifellos linear; daß er — mit der trivialen Ausnahme  $\bar{s}^h \equiv 0$  — nicht symmetrisch sein kann, folgt aus einer der obigen Überlegung für  $\mathfrak{E}^w$  analogen Argumentation.

Wir betrachten nun den Summenoperator

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^w + \mathfrak{E}^h \quad (3.7.36)$$

Anwendung auf einen beliebigen elastischen Zustand  $f^0$  des Grundkörpers führt auf den neuen elastischen Zustand

$$f^1 = \mathfrak{E} f^0 \quad (3.7.37)$$

wobei sich der Lastspannungsanteil  $f'^1$  aus (3.7.22) und der Eigenspannungsanteil  $f''^1$  aus (3.7.30) ergibt.  $f^1$  wird also repräsentiert durch

$$\underline{\varepsilon}^1 = \text{Def } \mathfrak{w}^1 + \underline{s}^\circ \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^1 \quad (3.7.38)$$

$$\underline{\sigma}^1 = \underline{c}^\circ \cdot \cdot \text{Def } \mathfrak{w}^1 + \text{Ink } \underline{\chi}^1 \quad (3.7.39)$$

$\text{Def } \mathfrak{w}^1$  und  $\text{Ink } \underline{\chi}^1$  folgen ihrerseits aus (3.7.28–29, 34–35).

Bei der Prüfung des Operators auf Symmetrie benutzen wir wieder wie in den §§ 3.2, 3.5, 3.6 das Kriterium (2.4.45); unter Verwendung von Satz 1, § 3.4 sowie (3.4.18) und (3.4.28) erhalten wir — bei Beschränkung auf einfach zusammenhängende Körper — für zwei beliebige Zustände  $\hat{f}^0$  und  $\hat{f}^0$  des Grundkörpers

$$\begin{aligned}
\{\hat{f}^0, \mathfrak{C} \hat{f}^0\} &= \{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} = \{\hat{f}'^0, \hat{f}'^1\} + \{\hat{f}''^0, \hat{f}''^1\} \\
&= \int_{(V_o)} \text{Def } \hat{\mathfrak{w}}^0 \cdot \underline{\varepsilon}^o \cdot \text{Def } \hat{\mathfrak{w}}^1 dV + \int_{(V_o)} \text{Ink } \hat{\underline{z}}^0 \cdot \underline{\varepsilon}^o \cdot \text{Ink } \hat{\underline{z}}^1 dV \\
&= \oint_{(S_o)} \hat{\mathfrak{w}}^0 \cdot \hat{\mathfrak{R}}^1 df + \int_{(V_o)} \hat{\mathfrak{w}}^0 \cdot \hat{\mathfrak{r}}^1 dV - \oint_{(S_o)} \hat{\mathfrak{Q}}^0 \cdot \hat{\eta}^1 \cdot \mathbf{n} df + \int_{(V_o)} \hat{\underline{z}}^0 \cdot \hat{\eta}^1 dV \\
&= \oint_{(S_o)} \hat{\mathfrak{w}}^0 \cdot \hat{\mathfrak{Q}}^0 df + \int_{(V_o)} \hat{\mathfrak{w}}^0 \cdot \hat{\mathfrak{q}}^0 dV - \oint_{(S_o)} \hat{\mathfrak{Q}}^0 \cdot \hat{\eta}^0 \cdot \mathbf{n} df + \int_{(V_o)} \hat{\underline{z}}^0 \cdot \hat{\eta}^0 dV \\
&= \oint_{(S_o)} \hat{\mathfrak{w}}^0 \cdot (\underline{\varepsilon}^w \cdot \underline{\varepsilon}^0) \cdot \mathbf{n} df - \int_{(V_o)} \hat{\mathfrak{w}}^0 \cdot \text{Div } (\underline{\varepsilon}^w \cdot \underline{\varepsilon}^0) dV \\
&\quad - \oint_{(S_o)} \hat{\mathfrak{Q}}^0 \cdot \text{Ink } (\underline{s}^h \cdot \underline{\underline{g}}^0) \cdot \mathbf{n} df + \int_{(V_o)} \hat{\underline{z}}^0 \cdot \text{Ink } (\underline{s}^h \cdot \underline{\underline{g}}^0) dV \\
&= \int_{(V_o)} \text{Def } \hat{\mathfrak{w}}^0 \cdot \underline{\varepsilon}^w \cdot \underline{\underline{g}}^0 dV + \int_{(V_o)} \text{Ink } \hat{\underline{z}}^0 \cdot \underline{s}^h \cdot \underline{\underline{g}}^0 dV \quad (3.7.40)
\end{aligned}$$

oder nach (3.7.14–15) ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
\{\hat{f}^0, \mathfrak{C} \hat{f}^0\} &= \int_{(V_o)} \text{Def } \hat{\mathfrak{w}}^0 \cdot \underline{\varepsilon}^w \cdot \text{Def } \hat{\mathfrak{w}}^0 dV + \int_{(V_o)} \text{Ink } \hat{\underline{z}}^0 \cdot \underline{s}^h \cdot \text{Ink } \hat{\underline{z}}^0 dV \\
&\quad + \int_{(V_o)} \text{Def } \hat{\mathfrak{w}}^0 \cdot \underline{\varepsilon}^w \cdot \underline{\varepsilon}^o \cdot \text{Ink } \hat{\underline{z}}^0 dV + \int_{(V_o)} \text{Ink } \hat{\underline{z}}^0 \cdot \underline{s}^h \cdot \underline{\varepsilon}^o \cdot \text{Def } \hat{\mathfrak{w}}^0 dV \quad (3.7.41)
\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man nach Vertauschung von  $\hat{f}^0$  und  $\hat{f}^1$

$$\begin{aligned}
\{\hat{f}^1, \mathfrak{C} \hat{f}^1\} &= \int_{(V_o)} \text{Def } \hat{\mathfrak{w}}^1 \cdot \underline{\varepsilon}^w \cdot \text{Def } \hat{\mathfrak{w}}^1 dV + \int_{(V_o)} \text{Ink } \hat{\underline{z}}^1 \cdot \underline{s}^h \cdot \text{Ink } \hat{\underline{z}}^1 dV \\
&\quad + \int_{(V_o)} \text{Def } \hat{\mathfrak{w}}^1 \cdot \underline{\varepsilon}^w \cdot \underline{\varepsilon}^o \cdot \text{Ink } \hat{\underline{z}}^1 dV + \int_{(V_o)} \text{Ink } \hat{\underline{z}}^1 \cdot \underline{s}^h \cdot \underline{\varepsilon}^o \cdot \text{Def } \hat{\mathfrak{w}}^1 dV \quad (3.7.42)
\end{aligned}$$

Man erkennt, daß die zweiten Zeilen von (3.7.41–42) im allgemeinen nicht übereinstimmen werden, der Operator  $\mathfrak{C}$  im allgemeinen Fall also unsymmetrisch sein wird.

Tatsächlich kann er — mit der trivialen Ausnahme  $\underline{\varepsilon}^w \equiv 0$ ,  $\underline{s}^h \equiv 0$  — überhaupt nicht symmetrisch sein. Um das einzusehen, suchen wir den zu  $\mathfrak{C}$  adjungierten Operator  $\mathfrak{C}^*$  auf, der nach (2.4.10–13) erklärt ist durch die Forderung

$$\{\hat{f}, \mathfrak{C} \hat{f}\} = \{\hat{f} \mathfrak{C}, \hat{f}\} = \{\hat{f}, \mathfrak{C}^* \hat{f}\} \quad (3.7.43)$$

wo  $\hat{f}$ ,  $\hat{f}$  zwei beliebige Zustände des Grundkörpers sind. Man muß also, um von  $\mathfrak{C}$  zu  $\mathfrak{C}^*$  zu gelangen, die Tensoren 4. Stufe  $\underline{\varepsilon}^w$  und  $\underline{s}^h$  in der zweiten Zeile



von (3.7.41) derart ersetzen durch Tensoren  $\underline{c}^{\bar{w}*}$  und  $\underline{s}^{\bar{h}*}$ , daß die zweite Zeile von (3.7.42) daraus hervorgeht. Dies ist erfüllt für

$$\underline{c}^{\bar{w}*} = \underline{c}^{\circ} \cdots \underline{s}^{\bar{h}} \cdots \underline{c}^{\circ} \quad (3.7.44)$$

$$\underline{s}^{\bar{h}*} = \underline{s}^{\circ} \cdots \underline{c}^{\bar{w}} \cdots \underline{s}^{\circ} \quad (3.7.45)$$

Andererseits darf sich aber beim Übergang zu  $\mathfrak{C}^*$  in der ersten Zeile von (3.7.41) nichts ändern. Aus diesen beiden Forderungen entnimmt man nun mit Hilfe einer (3.7.40) entsprechenden Umformung, die wir hier nicht anschreiben wollen, daß der adjungierte Operator  $\mathfrak{C}^*$  aus  $\mathfrak{C}$  hervorgeht, wenn man (3.7.23–24) und (3.7.31) ersetzt durch

$$\mathfrak{q}^{0*} = -\text{Div}(\underline{c}^{\bar{w}} \cdots \text{Def } \mathfrak{w}^0 + \underline{c}^{\bar{w}*} \cdots \underline{s}^{\circ} \cdots \text{Ink } \underline{\chi}^0) \quad (3.7.46)$$

$$\mathfrak{Q}^{0*} = \mathfrak{n} \cdot (\underline{c}^{\bar{w}} \cdots \text{Def } \mathfrak{w}^0 + \underline{c}^{\bar{w}*} \cdots \underline{s}^{\circ} \cdots \text{Ink } \underline{\chi}^0) \quad (3.7.47)$$

$$\overset{(-)}{\eta}^{0*} = \text{Ink}(\underline{s}^{\bar{h}} \cdots \text{Ink } \underline{\chi}^0 + \underline{s}^{\bar{h}*} \cdots \underline{c}^{\circ} \cdots \text{Def } \mathfrak{w}^0) \quad (3.7.48)$$

Der Operator  $\mathfrak{C}$  wäre demnach genau dann symmetrisch, wenn überall in  $V_0$   $\underline{c}^{\bar{w}} = \underline{c}^{\bar{w}*}$  und  $\underline{s}^{\bar{h}} = \underline{s}^{\bar{h}*}$  wäre. Dies wird aber — bis auf triviale Ausnahmen — durch (3.7.12) ausgeschlossen.  $\mathfrak{C}$  ist also fast immer unsymmetrisch.

Wir kommen zur Konvergenzabschätzung. Da der Operator unsymmetrisch ist, tritt an die Stelle des verallgemeinerten *Rayleigh*-Quotienten (2.5.73) bzw. (3.2.9) die Wurzel aus dem *Rayleigh*-Quotienten des symmetrischen und nicht-negativ definiten Produktoperators  $\mathfrak{C}^* \mathfrak{C}$

$$\tilde{\mu}_f = \sqrt{\frac{\{\mathfrak{C} f, \mathfrak{C} f\}}{\{f, f\}}} = \frac{\|\mathfrak{C} f\|}{\|f\|} \quad (3.7.49)$$

Ihre obere Grenze ist die Norm (2.4.5, 11) des Operators  $\mathfrak{C}$  oder  $\mathfrak{C}^*$  ([62], § 2; [66], Ziff. 66, 84)

$$\tilde{M} = \|\mathfrak{C}\| = \|\mathfrak{C}^*\| = \limsup \tilde{\mu}_f \quad (3.7.50)$$

Nach ([66], Ziff. 84) ist sie gleichzeitig die obere Grenze des Betrages eines entsprechenden Ausdrucks mit der „Bilinearform“  $\{\hat{f}, \mathfrak{C} \hat{f}\}$ , also

$$\tilde{M} = \limsup \frac{|\{\hat{f}, \mathfrak{C} \hat{f}\}|}{\|\hat{f}\| \cdot \|\hat{f}\|} = \limsup \frac{|\{\hat{f}, \mathfrak{C} \hat{f}\}|}{\sqrt{\{\hat{f}, \hat{f}\} \{\hat{f}, \hat{f}\}}} \quad (3.7.51)$$

für zwei beliebige, voneinander unabhängige Zustände  $\hat{f}$  und  $\hat{f}$  des Grundkörpers  $K^{\circ}$ . Setzen wir darin (3.7.40) ein, so folgt

$$\tilde{M} = \limsup \frac{\left| \int \text{Def } \hat{\mathfrak{w}} \cdots \underline{c}^{\bar{w}} \cdots \hat{\underline{\varepsilon}} \, dV + \int \text{Ink } \hat{\underline{\chi}} \cdots \underline{s}^{\bar{h}} \cdots \hat{\underline{\sigma}} \, dV \right|}{\sqrt{\int \hat{\underline{\varepsilon}} \cdots \hat{\underline{\sigma}} \, dV \int \hat{\underline{\varepsilon}} \cdots \hat{\underline{\sigma}} \, dV}} \quad (3.7.52)$$

wie die Integrale wie üblich über  $V_0$  zu erstrecken sind. Den Nenner können wir nach Satz 1, § 3.4 umformen

$$\begin{aligned}\{\hat{f}, \hat{f}\} &= \int \hat{\varepsilon} \cdots \hat{\sigma} \, dV = \{\hat{f}', \hat{f}'\} + \{\hat{f}'', \hat{f}''\} \\ &= \int \text{Def } \hat{w} \cdots \varepsilon^\circ \cdots \text{Def } \hat{w} \, dV + \int \text{Ink } \hat{\chi} \cdots \varepsilon^\circ \cdots \text{Ink } \hat{\chi} \, dV\end{aligned}\quad (3.7.53)$$

und entsprechend für  $\hat{f}$ . Im Zähler setzen wir

$$\hat{\sigma} = \varepsilon^{\bar{w}} \cdots \text{Def } \hat{w} + \varepsilon^\circ \cdots \varepsilon^{\bar{h}} \cdots \text{Ink } \hat{\chi} \quad (3.7.54)$$

Wir betrachten (3.7.54) als Repräsentation eines Zustandes  $\hat{f}$  des Grundkörpers  $K^\circ$ , quadrieren (3.7.52) und wenden die *Schwarzsche* Ungleichung auf den Zähler an. Damit folgt

$$\begin{aligned}\tilde{M}^2 &= \limsup \frac{\{\hat{f}, \hat{f}\}^2}{\{\hat{f}, \hat{f}\} \{\hat{f}, \hat{f}\}} \leq \limsup \frac{\{\hat{f}, \hat{f}\} \{\hat{f}, \hat{f}\}}{\{\hat{f}, \hat{f}\} \{\hat{f}, \hat{f}\}} \\ &= \limsup \frac{\{\hat{f}, \hat{f}\}}{\{\hat{f}, \hat{f}\}}\end{aligned}\quad (3.7.55)$$

Aus (3.7.12) und (3.7.54) leiten wir nun ab

$$\{\hat{f}, \hat{f}\} = \{\hat{f}', \hat{f}'\}^{\bar{w}} + \{\hat{f}'', \hat{f}''\}^{\bar{h}} \quad (3.7.56)$$

mit

$$\{\hat{f}', \hat{f}'\}^{\bar{w}} = \int_{(V_0)} \text{Def } \hat{w} \cdots \varepsilon^{\bar{w}} \cdots \varepsilon^\circ \cdots \varepsilon^{\bar{w}} \cdots \text{Def } \hat{w} \, dV \quad (3.7.57)$$

$$\{\hat{f}'', \hat{f}''\}^{\bar{h}} = \int_{(V_0)} \text{Ink } \hat{\chi} \cdots \varepsilon^{\bar{h}} \cdots \varepsilon^\circ \cdots \varepsilon^{\bar{h}} \cdots \text{Ink } \hat{\chi} \, dV \quad (3.7.58)$$

Formen wir den letzten Bruch in (3.7.55) mit Hilfe von (3.7.54) und (3.7.56) um, so können wir mit (3.2.17) abschätzen

$$\frac{\{\hat{f}, \hat{f}\}}{\{\hat{f}, \hat{f}\}} = \frac{\{\hat{f}', \hat{f}'\}^{\bar{w}} + \{\hat{f}'', \hat{f}''\}^{\bar{h}}}{\{\hat{f}', \hat{f}'\} + \{\hat{f}'', \hat{f}''\}} \leq \max\left(\frac{\{\hat{f}', \hat{f}'\}^{\bar{w}}}{\{\hat{f}', \hat{f}'\}}, \frac{\{\hat{f}'', \hat{f}''\}^{\bar{h}}}{\{\hat{f}'', \hat{f}''\}}\right) \quad (3.7.59)$$

Eine zu (3.2.12–19) analoge Schlußweise führt nach Einsetzen von (3.7.57–58) schließlich auf

$$\tilde{M}^2 \leq \limsup \left( \frac{\varepsilon \cdots \varepsilon^{\bar{w}} \cdots \varepsilon^\circ \cdots \varepsilon^{\bar{w}} \cdots \varepsilon}{\varepsilon \cdots \varepsilon^\circ \cdots \varepsilon}, \frac{\sigma \cdots \varepsilon^{\bar{h}} \cdots \varepsilon^\circ \cdots \varepsilon^{\bar{h}} \cdots \sigma}{\sigma \cdots \varepsilon^\circ \cdots \sigma} \right) \quad (3.7.60)$$

für beliebige Dehnungsfelder  $\varepsilon$  und Spannungsfelder  $\sigma$ . Wie wir in der nächsten Ziffer sehen werden, kann man dafür auch schreiben

$$\tilde{M} \leq \limsup \left( \frac{\varepsilon \cdots \varepsilon^{\bar{w}} \cdots \varepsilon}{\varepsilon \cdots \varepsilon^\circ \cdots \varepsilon}, \frac{\sigma \cdots \varepsilon^{\bar{h}} \cdots \sigma}{\sigma \cdots \varepsilon^\circ \cdots \sigma} \right) \quad (3.7.61)$$

Ist aber die elastische Energie im Realkörper  $K^+$  eigentlich positiv definit, so ist der Ausdruck (3.7.61) nach (3.7.4–9) stets kleiner als Eins, was für den Konvergenzbeweis des folgenden Iterationsverfahrens hinreicht.

Das gemischte Iterationsverfahren definieren wir nun durch

$$[f]^{n+1} = [f^*] + \mathfrak{C} [f]^n \quad (3.7.62)$$

wobei die Repräsentationen von  $[f^*]$

$$[\varepsilon^*] = \underline{s}^\circ \cdots [\sigma^*] = \text{Def} [\mathfrak{w}^*] + \underline{s}^\circ \cdots \text{Ink} [\chi^*] \quad (3.7.63)$$

$$[\sigma^*] = \underline{c}^\circ \cdots [\varepsilon^*] = \underline{c}^\circ \cdots \text{Def} [\mathfrak{w}^*] + \text{Ink} [\chi^*] \quad (3.7.64)$$

den Gleichungen

$$\text{Div} (\underline{c}^\circ \cdots \text{Def} [\mathfrak{w}^*]) = - [\mathfrak{p}] \quad (3.7.65)$$

$$\mathfrak{n} \cdot (\underline{c}^\circ \cdots \text{Def} [\mathfrak{w}^*]) = [\mathfrak{P}] \quad (3.7.66)$$

$$\text{Ink} (\underline{s}^\circ \cdots \text{Ink} [\chi^*]) = [\eta]^{(+)} \quad (3.7.67)$$

$$\mathfrak{n} \cdot \text{Ink} [\chi^*] = 0 \quad (3.7.68)$$

genügen. Hierbei bilden  $[\mathfrak{p}]$ ,  $[\mathfrak{P}]$  und  $[\eta]^{(+)}$  das gegebene System von Kräften und Inkompatibilitäten, zu welchem das Spannungs- und Dehnungsfeld im Realkörper  $K^+$  gesucht wird.

Man kann nun die gesuchte Lösung im Realkörper  $K^+$  aus dem Zustand  $[f]$  des Grundkörpers  $K^\circ$  entnehmen, gegen den das Verfahren (3.7.62) konvergiert. Zunächst erfüllt  $[f]$  die Gleichung

$$[f] = [f^*] + \mathfrak{C} [f] \quad (3.7.69)$$

Schreiben wir dies in den Repräsentationen

$$[\varepsilon] = \underline{s}^\circ \cdots [\sigma] = \text{Def} [\mathfrak{w}] + \underline{s}^\circ \cdots \text{Ink} [\chi] \quad (3.7.70)$$

$$[\sigma] = \underline{c}^\circ \cdots [\varepsilon] = \underline{c}^\circ \cdots \text{Def} [\mathfrak{w}] + \text{Ink} [\chi] \quad (3.7.71)$$

und berechnen beiderseits die Volumen- und Oberflächenkräfte sowie die Inkompatibilitäten, so wird daraus mit (3.7.23–29, 31–35, 65–68)

$$\text{Div} (\underline{c}^\circ \cdots \text{Def} [\mathfrak{w}]) = - [\mathfrak{p}] + \text{Div} (\underline{c}^{\bar{w}} \cdots (\text{Def} [\mathfrak{w}] + \underline{s}^\circ \cdots \text{Ink} [\chi])) \quad (3.7.72)$$

$$\mathfrak{n} \cdot (\underline{c}^\circ \cdots \text{Def} [\mathfrak{w}]) = [\mathfrak{P}] + \mathfrak{n} \cdot (\underline{c}^{\bar{w}} \cdots (\text{Def} [\mathfrak{w}] + \underline{s}^\circ \cdots \text{Ink} [\chi])) \quad (3.7.73)$$

$$\text{Ink} (\underline{s}^\circ \cdots \text{Ink} [\chi]) = [\eta]^{(+)} + \text{Ink} (\underline{s}^{\bar{h}} \cdots (\text{Ink} [\chi] + \underline{c}^\circ \cdots \text{Def} [\mathfrak{w}])) \quad (3.7.74)$$

$$\mathfrak{n} \cdot \text{Ink} [\chi] = \mathfrak{n} \cdot \text{Ink} [\chi^*] = 0 \quad (3.7.75)$$

Nun ist wegen (3.3.8–10), (3.7.8–9, 75)

$$\text{Div} (\underline{c}^{\bar{w}} \cdots \underline{s}^\circ \cdots \text{Ink} [\chi]) = - \text{Div} (\underline{c}^{\bar{w}} \cdots \underline{s}^\circ \cdots \text{Ink} [\chi]) \quad (3.7.76)$$

$$\mathfrak{n} \cdot (\underline{c}^{\bar{w}} \cdots \underline{s}^\circ \cdots \text{Ink} [\chi]) = - \mathfrak{n} \cdot (\underline{c}^{\bar{w}} \cdots \underline{s}^\circ \cdots \text{Ink} [\chi]) \quad (3.7.77)$$

$$\text{Ink} (\underline{s}^{\bar{h}} \cdots \underline{c}^\circ \cdots \text{Def} [\mathfrak{w}]) = - \text{Ink} (\underline{s}^{\bar{h}} \cdots \underline{c}^\circ \cdots \text{Def} [\mathfrak{w}]) \quad (3.7.78)$$

Also erhält man aus (3.7.72–75), wenn man alle Glieder mit  $[\mathfrak{w}]$  und  $[\underline{\chi}]$  nach links schafft und (3.7.70–71) beachtet

$$\text{Div}(\underline{\mathfrak{e}}^w \cdot [\underline{\varepsilon}]) = -[\mathfrak{p}] \quad (3.7.79)$$

$$\mathfrak{n} \cdot (\underline{\mathfrak{e}}^w \cdot [\underline{\varepsilon}]) = [\mathfrak{P}] \quad (3.7.80)$$

$$\text{Ink}(\underline{s}^h \cdot [\underline{\sigma}]) = [\underline{\eta}]^{(+)} \quad (3.7.81)$$

Die Spannung  $\underline{\mathfrak{e}}^w \cdot [\underline{\varepsilon}]$  erfüllt also die inhomogene Gleichgewichtsbedingung mit dem gegebenen Kräftesystem  $[\mathfrak{p}]$ ,  $[\mathfrak{P}]$ , und die Dehnung  $\underline{s}^h \cdot [\underline{\sigma}]$  erfüllt die inhomogene Kompatibilitätsbedingung mit der gegebenen Inkompatibilität  $[\underline{\eta}]^{(+)}$ . Außerdem sind  $\underline{\mathfrak{e}}^w \cdot [\underline{\varepsilon}]$  und  $\underline{s}^h \cdot [\underline{\sigma}]$  aber auch im Realkörper  $K^+$  durch das Hookesche Gesetz miteinander verbunden. Denn es ist nach (3.7.6, 70)

$$\underline{\mathfrak{e}}^+ \cdot \underline{s}^h \cdot [\underline{\sigma}] = \underline{\mathfrak{e}}^w \cdot \underline{s}^\circ \cdot \underline{\mathfrak{e}}^h \cdot \underline{s}^h \cdot [\underline{\sigma}] = \underline{\mathfrak{e}}^w \cdot \underline{s}^\circ \cdot [\underline{\sigma}] = \underline{\mathfrak{e}}^w \cdot [\underline{\varepsilon}] \quad (3.7.82)$$

oder nach (3.7.7, 71)

$$\underline{s}^+ \cdot \underline{\mathfrak{e}}^w \cdot [\underline{\varepsilon}] = \underline{s}^h \cdot \underline{\mathfrak{e}}^\circ \cdot \underline{s}^w \cdot \underline{\mathfrak{e}}^w \cdot [\underline{\varepsilon}] = \underline{s}^h \cdot \underline{\mathfrak{e}}^\circ \cdot [\underline{\varepsilon}] = \underline{s}^h \cdot [\underline{\sigma}] \quad (3.7.83)$$

Somit sind die beiden Tensorfelder

$$[\underline{\tau}] = \underline{\mathfrak{e}}^w \cdot [\underline{\varepsilon}] \quad (3.7.84)$$

$$[\underline{\gamma}] = \underline{s}^h \cdot [\underline{\sigma}] \quad (3.7.85)$$

das gesuchte Spannungs- und Dehnungsfeld im Realkörper  $K^+$ .

Über die Lösungsmethoden der Einzelprobleme im Grundkörper  $K^\circ$  gilt wieder das am Schluß von § 3.5 und § 3.6 sowie eingangs dieser Ziffer Gesagte; man kann auch das gemischte Verfahren, wie in 3.3.D beschrieben, nach Wahl mit Verschiebungs- oder Spannungsfunktionen allein durchführen. Dagegen sind die dort erwähnten Konvergenzverbesserungsmethoden wegen der Unsymmetrie des Operators  $\mathfrak{C}$  nicht mehr ohne weiteres anwendbar. Man könnte freilich daran denken, in Anlehnung an ein aus der Matrizenrechnung bekanntes Verfahren [68, 69] die (3.5.30) bzw. (3.6.30) entsprechende Operatorgleichung

$$\mathfrak{A}[f] = [f^*] \quad (3.7.86)$$

mit

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} - \mathfrak{C} \quad (3.7.87)$$

zu ersetzen durch

$$\mathfrak{A}^* \mathfrak{A} [f] = \mathfrak{A}^* [f^*] \quad (3.7.88)$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der aus der Matrizenrechnung bekannten „Gauss'schen Transformation“ [68] oder „Normalisation“ [69]. Der Produktoperator

$$\mathfrak{A}^* \mathfrak{A} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}^*)(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}) \quad (3.7.89)$$

ist zweifellos symmetrisch und unter den hier gemachten Voraussetzungen eigentlich positiv definit. Der zu  $\mathfrak{C}$  adjungierte Operator  $\mathfrak{C}^*$  kann aus (3.7.46–48)

entnommen werden. Doch wird wohl wie in der Matrizenrechnung darauf zu achten sein, daß der in (3.7.88) gegenüber (3.7.86) erhöhte Rechenaufwand durch die Wirksamkeit des Konvergenzverbesserungsverfahrens (§ 5) auch gerechtfertigt wird.

### 3.8 Die Vergleichskörper im allgemeinen Fall

Wir haben in der vorangehenden Ziffer bei der Aufstellung des allgemeinen Iterationsverfahrens und beim Konvergenzbeweis vorausgesetzt, daß zu jedem Realkörper und jedem Grundkörper mit gegebenen, durch  $\underline{c}^+$  und  $\underline{s}^+$  bzw.  $\underline{c}^\circ$  und  $\underline{s}^\circ$  beschriebenen elastischen Eigenschaften eine Gruppe von Vergleichskörpern umkehrbar eindeutig zugeordnet werden kann, deren elastische Eigenschaften durch die Tensoren  $\underline{c}^w$ ,  $\underline{s}^h$ ,  $\underline{c}^{\bar{w}}$ ,  $\underline{s}^{\bar{h}}$  bestimmt sind nach den Definitionen (3.7.4–9), und für die außerdem die Beziehungen (3.7.10–12) gelten.

Nach Abb. 3.7.1 war dies im Falle räumlich getrennter Erweichungs- und Verhärtungsbereiche evident; wir haben den Beweis nun für den allgemeinen Fall nachzutragen.

Wir setzen zunächst voraus, daß nicht nur die Tensoren  $\underline{c}^\circ$  und  $\underline{s}^\circ$  des Grundkörpers, sondern auch die Tensoren  $\underline{c}^+$  und  $\underline{s}^+$  des Realkörpers in  $V_0$  nirgends semidefinit, also daselbst zueinander reziproke Tensoren sind. Um nun für die folgenden Betrachtungen die Ergebnisse der Matrizenrechnung [68–70] benützen zu können, übertragen wir sämtliche Gleichungen in die *Voigtsche* Schreibweise [1, 2, 16, 23–25], d. h. wir beschreiben die Spannungen und Dehnungen nicht durch Tensoren 2. Stufe  $\sigma_{ij}$  bzw.  $\varepsilon_{ij}$ , sondern durch Spaltenmatrizen  $\sigma_a$  bzw.  $e_a$ . Die Beziehung zu den Tensorkomponenten wird hergestellt durch die Gleichungen

$$(\sigma_a) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \qquad (e_a) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2 \varepsilon_{yz} \\ 2 \varepsilon_{zx} \\ 2 \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \qquad (3.8.1)$$

An die Stelle der Tensoren 4. Stufe  $c_{ijkl}$  und  $s_{ijkl}$  treten nun sinngemäß symmetrische Matrizen  $c_{ab}$  und  $s_{ab}$ , deren einzelne Elemente sich von den Tensorkomponenten teilweise durch einfache Zahlenfaktoren unterscheiden. Im übrigen sind wegen der Symmetrieeigenschaften der hier vorkommenden Tensoren 2. und 4. Stufe die doppelt-skalaren Tensormultiplikationen und die Matrizenmultiplikationen eindeutig aufeinander abbildbar; z. B. kann das Symbol  $\underline{c} \cdot \cdot \underline{\varepsilon}$  gleichermaßen als Abkürzung für die Tensormultiplikation  $c_{ijkl} \varepsilon_{kl}$  oder für die Matrizenmultiplikation  $c_{ab} e_b$  aufgefaßt werden.

Die Spaltenmatrizen  $\sigma_a$  und  $e_a$  sind im Sinne der linearen Algebra „Vektoren“, nicht natürlich im physikalischen Sinne. Ihre Transformation bei einer Drehung

des Koordinatensystems im physikalischen Raum bestimmt sich vielmehr aus den Transformationseigenschaften der Tensoren 2. Stufe im *Euklidischen* Raum; sie ist im algebraischen „Matrizenraum“ immerhin noch affin [16], und entsprechendes gilt für die Tensoren 4. Stufe und die zugeordneten Matrizen. Die vom physikalischen Koordinatensystem unabhängigen affinen Transformationen im abstrakten Matrizenraum sind jedoch praktisch von Bedeutung für den Vergleich zweier Tensoren des Typs  $\underline{c}$  oder  $\underline{s}$  und für die Bestimmung der elastischen Eigenschaften der Vergleichskörper, wenn sie sich nicht wie im Falle räumlich getrennter Erweichungs- und Verhärtungsgebiete einfach aus der Anschauung ableiten lassen.

Zum Vergleich der Tensoren  $\underline{c}^\circ$  und  $\underline{c}^+$  transformieren wir die zugehörigen *Voigtschen* Matrizen  $c_{ab}^\circ$  und  $c_{ab}^+$  affin auf gemeinsame Hauptachsen im Matrizenraum; da  $c_{ab}^\circ$  voraussetzungsgemäß nirgends singular ist, gibt es überall in den Körpern  $K^\circ$  und  $K^+$  eine nichtsinguläre Matrix  $C_{ab}^{+ \circ}$  derart, daß

$$C_{a\lambda}^{+ \circ} C_{b\lambda}^+ = c_{ab}^\circ \quad (3.8.2)$$

und

$$C_{a\lambda}^{+ \circ} C_{(\lambda)}^+ C_{b\lambda}^+ = c_{ab}^+ \quad (3.8.3)$$

Hier sind die Summationsindizes der Übersichtlichkeit wegen mit griechischen Buchstaben bezeichnet, und  $C_{(a)}^+$  bedeutet die Diagonalmatrix der Eigenwerte von  $c_{ab}^+$  bezüglich  $c_{ab}^\circ$ . Wir werden Diagonalmatrizen auch weiterhin mit einem eingeklammerten Index bezeichnen und vereinbaren, daß über einen eingeklammerten Index dann und nur dann summiert werden soll, wenn er außerdem auch noch zweimal ohne Klammer im selben Produkt auftritt. Da  $C_{ab}^{+ \circ}$  nirgends singular ist, gibt es dazu auch überall eine transponiert-inverse Matrix  $S_{ab}^{+ \circ}$ , so daß

$$C_{a\lambda}^{+ \circ} S_{a\lambda}^{+ \circ} = C_{\lambda a}^{+ \circ} S_{\lambda b}^{+ \circ} = \delta_{ab} \quad (3.8.4)$$

$\delta_{ab}$  ist das *Kronecker-Symbol*. Infolge der Nichtsingularität von  $c_{ab}^+$  gilt dann auch, wie man durch Multiplikation mit (3.8.2–3) leicht nachprüft,

$$S_{a\lambda}^{+ \circ} S_{b\lambda}^+ = s_{ab}^\circ \quad (3.8.5)$$

und

$$S_{a\lambda}^{+ \circ} S_{(\lambda)}^+ S_{b\lambda}^+ = s_{ab}^+ \quad (3.8.6)$$

mit

$$S_{(a)}^+ C_{(a)}^+ = 1 \quad (3.8.7)$$

Transformiert man noch die Dehnungen und Spannungen nach

$$\tilde{e}_a = C_{\lambda a}^{+ \circ} e_\lambda \quad (3.8.8)$$

und

$$\tilde{\sigma}_a = S_{\lambda a}^{+ \circ} \sigma_\lambda \quad (3.8.9)$$

so wird das *Hookesche* Gesetz in diesen transformierten Größen besonders einfach. Es ist dann im Grundkörper

$$\tilde{e}_a = \tilde{\sigma}_a \quad (3.8.10)$$

und im Realkörper

$$\tilde{\sigma}_a = C_{(a)}^+ \tilde{e}_a \quad \tilde{e}_a = S_{(a)}^+ \tilde{\sigma}_a \quad (3.8.11)$$

Wegen (3.8.4) lassen sich nun — unabhängig von der Zahl der Faktoren — alle doppelt-skalaren Produkte in den vorangehenden Paragraphen in diese einfache Diagonalform übertragen, wenn man nur beachtet, daß darin einem Faktor des Typs  $\underline{c}$  oder  $\underline{\sigma}$  nur ein Faktor des Typs  $\underline{s}$  oder  $\underline{\varepsilon}$  folgen oder vorangehen darf. Diese Forderung muß aber schon auf Grund der physikalischen Bedeutung dieser Tensoren stets erfüllt sein. Entsprechend dürfen in einer Summe nur Tensoren gleicher Art addiert werden.

In der Diagonalform sind nun die gesuchten Tensoren leicht aufzustellen, welche die elastischen Eigenschaften der Vergleichskörper beschreiben. Wir definieren gemäß der Vorschrift (3.7.4) den Tensor  $\underline{c}^w$  in der Diagonalform

$$C_{(a)}^w = \begin{cases} C_{(a)}^+ & \text{für } C_{(a)}^+ < 1 \\ 1 & \text{für } C_{(a)}^+ \geq 1 \end{cases} \quad (3.8.12)$$

und nach der Vorschrift (3.7.5)  $\underline{s}^h$  in der Diagonalform

$$S_{(a)}^h = \begin{cases} S_{(a)}^+ & \text{für } S_{(a)}^+ < 1 \\ 1 & \text{für } S_{(a)}^+ \geq 1 \end{cases} \quad (3.8.13)$$

Mit (3.8.7) ist nun die Erfüllung von (3.7.6–7) in der Diagonalform leicht zu verifizieren. Entsprechend verfahren wir bei der Aufstellung der Diagonalformen von  $\underline{c}^w$  und  $\underline{s}^h$ . Nach der Vorschrift (3.7.8–9) erhält man aus (3.8.12–13)

$$C_{(a)}^w = \begin{cases} 1 - C_{(a)}^+ & \text{für } C_{(a)}^+ < 1 \\ 0 & \text{für } C_{(a)}^+ \geq 1 \end{cases} \quad (3.8.14)$$

und

$$S_{(a)}^h = \begin{cases} 1 - S_{(a)}^+ & \text{für } S_{(a)}^+ < 1 \\ 0 & \text{für } S_{(a)}^+ \geq 1 \end{cases} \quad (3.8.15)$$

Die Beziehungen (3.7.10–11) liest man daraus ohne weiteres ab, und (3.7.12) folgt, wenn man bedenkt, daß sich nach (3.8.7) die Ungleichungen  $C_{(a)}^+ < 1$  und  $S_{(a)}^+ < 1$  gegenseitig ausschließen.

Zur praktischen Bestimmung der  $\underline{c}$ - und  $\underline{s}$ -Tensoren für die Vergleichskörper wird man also im allgemeinen zunächst die Transformationsmatrizen  $C_{ab}^{+}$  und die Diagonalform  $C_{(a)}^+$  von  $\underline{c}^+$  nach (3.8.2–3) bestimmen. Hat man dann nach den Vorschriften (3.8.12–15) die Diagonalformen der gesuchten Tensoren aufgestellt, so kann man diese nach einer zu (3.8.3) bzw. (3.8.6) entsprechenden Formel wieder auf die *Voigtsche* Matrizenform zurücktransformieren und anschließend auf die Tensorform oder irgend eine andere für die Rechnung zweckmäßige Darstellung übergehen. Wir bemerken noch, daß die Diagonalform invariant ist gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems im physikalischen Raum. Denn zu einer solchen Drehung gehört nach Gl. (4.3–8) aus [16] eine affine Transformation der *Voigtschen* Matrizen; eine gemeinsame affine Transformation („Drehstreckung“ [68, 69]) der beiden Matrizen auf

der rechten Seite von (3.8.2–3) hebt sich aber bei der Diagonalisierung heraus. Eine — für diese Betrachtungen allerdings unwesentliche — Mehrdeutigkeit der Transformationsmatrizen  $C_{ab}^{c+}$  tritt auf, wenn einige der Eigenwerte  $C_{(a)}^+$  untereinander gleich sind. So kann man etwa eine beliebige orthogonale Transformation im Matrizenraum hinzufügen, wenn  $c^+$  durch Multiplikation mit einem Skalar aus  $c^\circ$  hervorgeht. Dieser Grenzfall gehört aber zu den Beispielen, die sich nach Abb. 3.7.1 anschaulich erledigen lassen. In anderen Fällen sind solche orthogonalen Transformationen nur noch in einem Unterraum des Matrizenraums willkürlich wählbar. Man kann sie dann gegebenenfalls zur Vereinfachung von  $C_{ab}^{c+}$  benutzen; im übrigen ändern sie nichts an den Beziehungen (3.8.12–15).

Wir wenden diese Ergebnisse auf die Konvergenzabschätzungen von §§ 3.2, 5, 6, 7 an. Zunächst können wir jetzt die Funktion  $F^*(\mathfrak{x})$  in (3.2.16) explizit angeben; es ist

$$F^*(\mathfrak{x}) = S'_{\max}(\mathfrak{x}) \quad (3.8.16)$$

wo für irgend ein festes  $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$

$$S'_{\max}(\mathfrak{x}_0) = \max(S'_{(a)}(\mathfrak{x}_0)) \quad (3.8.17)$$

erklärt ist und  $S'_{(a)}(\mathfrak{x})$  durch eine (3.8.5–6) entsprechende Matrizentransformation aus  $\underline{s}'(\mathfrak{x})$  und  $\underline{s}^\circ(\mathfrak{x})$  hervorgeht.

Entsprechend definieren wir

$$S'_{\min}(\mathfrak{x}_0) = \min(S'_{(a)}(\mathfrak{x}_0)) \quad (3.8.18)$$

Die Ausdrücke (3.8.17) bzw. (3.8.18) stellen das lokale Maximum bzw. Minimum der Funktion  $F(\mathfrak{x}, \underline{g})$  in (3.2.14) dar. Aus (3.2.9–11) wird nun nach (3.8.10–11)

$$\mu_f = \frac{\{f, \mathfrak{B}f\}}{\{f, f\}} = \frac{\int \tilde{e}_a S'_{(a)} \tilde{e}_a dV}{\int \tilde{e}_a \tilde{e}_a dV} \quad (3.8.19)$$

$$m \geq \liminf S'_{\min} \quad (3.8.20)$$

$$M \leq \limsup S'_{\max} \quad (3.8.21)$$

und das Konvergenzkriterium (3.2.12) geht über in

$$\limsup (|S'_{\max}|, |S'_{\min}|) < 1 \quad (3.8.22)$$

Definieren wir in (3.8.17–18) entsprechender Weise die Funktionen  $C_{\max}^+$ ,  $C_{\min}^+$ ,  $S_{\max}^+$ ,  $S_{\min}^+$  und  $C_{\max}^-$ ,  $C_{\min}^-$ ,  $S_{\max}^-$ ,  $S_{\min}^-$ , so wird aus dem Konvergenzkriterium (3.5.21)

$$\limsup (|C_{\max}^-|, |C_{\min}^-|) < 1 \quad (3.8.23)$$

und aus (3.6.21)

$$\limsup (|S_{\max}^-|, |S_{\min}^-|) \quad (3.8.24)$$

Nach (3.8.7) ist wegen  $C_{(a)}^+$ ,  $S_{(a)}^+ > 0$

$$C_{\max}^+ S_{\min}^+ = 1 \quad (3.8.25)$$

$$S_{\max}^+ C_{\min}^+ = 1 \quad (3.8.26)$$



also nach (3.5.1)

$$\limsup C_{\max}^- = 1 - \liminf C_{\min}^+ = 1 - \frac{1}{\limsup S_{\max}^+} \quad (3.8.27)$$

$$\liminf C_{\min}^- = 1 - \limsup C_{\max}^+ = 1 - \frac{1}{\liminf S_{\min}^+} \quad (3.8.28)$$

und entsprechend nach (3.6.1)

$$\limsup S_{\max}^- = 1 - \liminf S_{\min}^+ = 1 - \frac{1}{\limsup C_{\max}^+} \quad (3.8.29)$$

$$\liminf S_{\min}^- = 1 - \limsup S_{\max}^+ = 1 - \frac{1}{\liminf C_{\min}^+} \quad (3.8.30)$$

Nun ersetzen wir den Grundkörper  $K^\circ$  mit den Elastizitätskonstanten und -koeffizienten  $\underline{c}^\circ, \underline{s}^\circ$  durch einen anderen Grundkörper  $\tilde{K}^\circ$  mit

$$\tilde{c}^\circ = \alpha \underline{c}^\circ, \quad \tilde{s}^\circ = \frac{1}{\alpha} \underline{s}^\circ \quad (3.8.31)$$

wo  $\alpha$  eine Konstante ist. Bleibt gleichzeitig der Realkörper  $K^+$  unverändert, so hat man

$$\tilde{C}_{(a)}^+ = \frac{1}{\alpha} C_{(a)}^+, \quad \tilde{C}_{(a)}^- = 1 - \frac{1}{\alpha} C_{(a)}^+ = 1 - \frac{1}{\alpha S_{(a)}^+} \quad (3.8.32)$$

$$\tilde{S}_{(a)}^+ = \alpha S_{(a)}^+, \quad \tilde{S}_{(a)}^- = 1 - \alpha S_{(a)}^+ = 1 - \frac{\alpha}{C_{(a)}^+} \quad (3.8.33)$$

Die Beziehungen (3.8.25–26) bleiben erhalten. Nun suchen wir durch Variation der Konstanten  $\alpha$  denjenigen Wert  $\alpha'$  bzw.  $\alpha''$  zu bestimmen, für welchen (3.8.23) bzw. (3.8.24) den kleinsten Wert annehmen, d. h. wir suchen den Grundkörper innerhalb der durch (3.8.31) gegebenen Möglichkeiten so zu bestimmen, daß die Konvergenzabschätzungen (3.5.21) bzw. (3.6.21) möglichst günstig ausfallen.

Im ersten Fall erhalten wir aus (3.8.23) die Bedingung

$$|\limsup \tilde{C}_{\max}^-| = |\liminf \tilde{C}_{\min}^-| \quad (3.8.34)$$

wo die Verwendung von „Lim“ statt „lim“ auf die im Sinne der Konvergenzabschätzung optimale Wahl von  $\alpha$  hinweist. Es folgt mit (3.8.27, 28, 32)

$$1 - \frac{1}{\alpha'} \liminf C_{\min}^+ = -1 + \frac{1}{\alpha'} \limsup C_{\max}^+ \quad (3.8.35)$$

und daraus

$$\alpha' = \frac{1}{2} (\limsup C_{\max}^+ + \liminf C_{\min}^+) \quad (3.8.36)$$

Einsetzen in (3.8.35) und Umformung mit (3.8.26) ergibt

$$\begin{aligned} \text{Lim sup } \tilde{C}_{\max}^- &= 1 - 2 \frac{\liminf C_{\min}^+}{\limsup C_{\max}^+ + \liminf C_{\min}^+} \\ &= 1 - \frac{2}{1 + \frac{\limsup C_{\max}^+}{\liminf C_{\min}^+}} \\ &= 1 - \frac{2}{1 + \limsup C_{\max}^+ \limsup S_{\max}^+} \end{aligned} \quad (3.8.37)$$

Im zweiten Fall liefert eine entsprechende Überlegung nach (3.8.24, 29, 30, 33)

$$\frac{1}{\alpha''} = \frac{1}{2} (\limsup S_{\max}^+ + \liminf S_{\min}^+) \quad (3.8.38)$$

womit man in analoger Weise unter Benutzung von (3.8.25) weiterrechnet. Wir fassen das Ergebnis mit (3.8.37) zusammen:

$$\text{Lim sup } \tilde{C}_{\max}^- = \limsup \tilde{S}_{\max}^- = 1 - \frac{2}{1 + \limsup C_{\max}^+ \limsup S_{\max}^+} \quad (3.8.39)$$

Die günstigste Konvergenzabschätzung fällt also gleich aus für die Methode der sukzessiven Belastung wie für die Methode der sukzessiven Verspannung. Schließlich bestimmen wir in derselben Weise die günstigste Wahl des Grundkörpers (3.8.31) für das gemischte Iterationsverfahren von § 3.7. Aus (3.7.60) erhalten wir durch Umschreiben in die Diagonalform

$$\tilde{M}^2 \leq \limsup (C_{\max}^{\bar{w}}, S_{\max}^{\bar{h}})^2 \quad (3.8.40)$$

und daraus mit (3.8.14, 15) die Diagonalform der Ungleichung (3.7.61)

$$\begin{aligned} \tilde{M} &\leq \limsup (C_{\max}^{\bar{w}}, S_{\max}^{\bar{h}}) \\ &= \limsup (1 - C_{\min}^+, 1 - S_{\min}^+) \end{aligned} \quad (3.8.41)$$

Die günstigste Konvergenzabschätzung erhält man nach (3.8.31–33) aus der Bedingung

$$1 - \text{Lim inf } \tilde{C}_{\min}^+ = 1 - \text{Lim inf } \tilde{S}_{\min}^+ \quad (3.8.42)$$

$$1 - \frac{1}{\alpha'''} \liminf C_{\min}^+ = 1 - \alpha''' \liminf S_{\min}^+ \quad (3.8.43)$$

also für

$$\alpha''' = \sqrt{\frac{\liminf C_{\min}^+}{\liminf S_{\min}^+}} \quad (3.8.44)$$

Einsetzen in (3.8.43) liefert jetzt die günstigste Abschätzung der Form (3.8.41)

$$\text{Lim sup } (\tilde{C}_{\max}^{\bar{w}}, \tilde{S}_{\max}^{\bar{h}}) \leq 1 - \sqrt{\liminf C_{\min}^+ \liminf S_{\min}^+}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt[\limsup C_{\max}^+ \limsup S_{\max}^+]} \quad (3.8.45)$$

Wir vergleichen (3.8.45) mit (3.8.39). Nach dem Satz vom geometrischen und arithmetischen Mittel ist

$$\sqrt[\limsup C_{\max}^+ \limsup S_{\max}^+]{} \leq \frac{1 + \limsup C_{\max}^+ \limsup S_{\max}^+}{2} \quad (3.8.46)$$

Durch Einsetzen dieser Ungleichung in (3.8.39, 45) erhält man nun leicht

$$\text{Lim sup } (\tilde{C}_{\max}^w, \tilde{S}_{\max}^h) \leq \text{Lim sup } \tilde{C}_{\max}^- = \text{Lim sup } \tilde{S}_{\max}^- \quad (3.8.47)$$

Das gemischte Iterationsverfahren liefert also in jedem Fall die günstigste Konvergenzabschätzung. Freilich muß man im Einzelfall immer bedenken, daß unsere Abschätzung ziemlich roh sein kann, und daß die günstigste Konvergenzabschätzung keineswegs immer mit der besten Konvergenz zusammenfallen muß. Wir haben schon in den vorangehenden Ziffern bemerkt, daß eine andere Wahl des Grundkörpers ganz offensichtlich dann zweckmäßig sein wird, wenn sich die Nichthomogenitäten nur auf ein relativ kleines Ausnahmgebiet beschränken.

Man könnte noch daran denken, neben der Variation eines konstanten Skalarfaktors in (3.8.31) noch weitere Variationen des Grundkörpers zuzulassen. Legt man den elastischen Eigenschaften von  $K^\circ$  überhaupt keine Beschränkungen auf, so folgt trivialerweise die günstigste Konvergenzabschätzung dann, wenn der Grundkörper mit dem Realkörper identisch ist. Praktisch sind einer Variation des Grundkörpers  $K^\circ$  — abgesehen von dem Skalarfaktor in (3.8.31) — freilich sehr enge Grenzen gezogen durch die Forderung, daß die elastischen Randwert- und Summationsprobleme im Grundkörper einfach — oder zumindest wesentlich einfacher als im Realkörper — zu lösen sein müssen. Meist wird man sich wohl mit einer Variation der Querkontraktion in einem homogenen und isotropen Grundkörper begnügen müssen, und selbst diese ist durch das Postulat einer eigentlich positiv definiten elastischen Energie in  $K^\circ$  eingeschränkt. Andernfalls würden die elastischen Zustände des Grundkörpers keinen *Hilbert*-Raum mehr bilden, und die ganze Beweisführung der vorangehenden Ziffern würde hinfällig.

## § 4. Anwendung auf Randwertprobleme an homogenen Körpern

### 4.1 Grundbegriffe und Grundvoraussetzungen

Wir kommen wieder auf das Iterationsverfahren von § 1.2 zurück. Dort hatten wir nach dem Grundgedanken der sukzessiven Belastung von *Hetényi* [50] die zweite Randwertaufgabe an einer gegebenen Scheibe  $K^+$  zu lösen versucht durch Bestimmung einer Kräftebelegung  $[R]$  auf einer mit der Berandung  $S^+$  des Realkörpers  $K^+$  kongruenten Kurve  $(S)$  im Grundkörper  $K^\circ$  (z. B. der unendlichen Scheibe), welche in ihrem Innenbereich  $(K^+)$  genau dieselbe Verzerrung hervorruft wie die auf dem Rand  $S^+$  gegebene Kräftebelegung  $[P]$  im Realkörper  $K^+$ . Wir hatten mit  $Q$  bzw.  $[Q]$  den Teil der Kräftebelegung  $R$

bzw.  $[R]$  auf  $(S)$  bezeichnet, welcher vom Außengebiet  $(K^-)$  der Kurve  $(S)$  in  $K^\circ$  aufgenommen wurde. Auf diese Weise erhielten wir die Funktionalgleichung

$$[R] = [P] + [Q] \quad (4.1.1)$$

Die Tensorindizes haben wir in diesen Formeln weggelassen. Wir suchten die Lösung anzunähern durch eine Reihe in den iterativ nach (1.2.6-7), also durch

$$R^0 = [P] \quad (4.1.2)$$

$$R^r = Q^{r-1} \quad (4.1.3)$$

bestimmten Kräftebelegungen  $R^r$ . Die aufsummierte Form dieses Iterationsverfahrens war nach (1.2.9)

$$[R]^{n+1} = [P] + [Q]^n \quad (4.1.4)$$

und es wurde gezeigt, daß das Verfahren, falls es konvergiert, nur gegen die gesuchte Lösung  $[R]$  konvergieren kann. In § 2 haben wir dann, ausgehend von Abb. 2.2.1, einige hinreichende Konvergenzbedingungen für allgemeine Iterationsverfahren formuliert und in § 3 auf Nichthomogenitätsprobleme angewendet.

In diesem Paragraphen wollen wir entsprechende Überlegungen für die zweite Randwertaufgabe durchführen. Nach § 1.3 erkennt man sofort, daß sich der allgemeine Teil dieser Überlegungen auch auf die erste Randwertaufgabe anwenden lassen wird; es ist dazu nichts weiter erforderlich als eine Umdeutung der im folgenden eingeführten Operatoren und Symbole (vgl. § 4.6). Gemischte Randwertprobleme würden dagegen — wegen einer bereits in § 3.7 erwähnten Unsymmetrie des zugehörigen Operators — weitere Untersuchungen erfordern, auf die wir hier nicht eingehen wollen. Wir werden über Rechenversuche zur zweiten Randwertaufgabe berichten und mögliche Verbesserungen der numerischen Rechenverfahren diskutieren, bemerken aber, daß sich die folgenden Überlegungen in ihrem allgemeinen Teil auf beliebige Lösungsmethoden beziehen, ebenso wie die Konvergenzverbesserungsmethoden in § 5.

Vor einer Konvergenzuntersuchung müssen wir zunächst den in § 1.2 offengelassenen Zusammenhang zwischen  $Q$  und  $R$  näher untersuchen. Wir formulieren ihn zunächst symbolisch mit Hilfe von Operatoren, welche die Lösung einer Randwertaufgabe darstellen. Hierbei setzen wir stets die Existenz und die Eindeutigkeit dieser Lösungen voraus; es wird sich zeigen, daß sich daraus bereits der Konvergenzbeweis ergibt. Zunächst sei etwa für eine — innerhalb gewisser, von der speziellen Natur des vorgelegten Problems abhängiger Beschränktheits- und Differenzierbarkeitsbedingungen (s. u.) — beliebig vorgegebene Verschiebung der Randkurve  $S^+$  bzw.  $S^-$  mit der von einem festen Punkt aus gemessenen Bogenlänge  $s$

$$w \triangleq \mathfrak{w}(\mathfrak{x}(s)) = \mathfrak{w}(s) \triangleq w_i(x_i(s)) = w_i(s) \quad (4.1.5)$$

die Lösung der ersten Randwertaufgabe an  $K^+$  symbolisiert durch

$$P = \Pi^+ w \quad (4.1.6)$$

und an  $K^-$  durch

$$Q = \Pi^- w \quad (4.1.7)$$

Nach (4.1.6) ist also  $\Pi^+ w$  diejenige Kräftebelegung auf  $S^+$  an  $K^+$ , welche auf diesem Rand gerade die Verschiebung  $w \triangleq w_i(s)$  hervorruft, und entsprechend  $\Pi^- w$  diejenige Kräftebelegung auf  $S^-$  an  $K^-$ , welche dort gerade die Verschiebung  $w \triangleq w_i(s)$  bewirkt. Fügen wir nun den Realkörper  $K^+$  und den Differenzkörper  $K^-$  zum Grundkörper  $K^\circ$  zusammen, und bezeichnen wir mit

$$R = P + Q = \Pi^\circ w \quad (4.1.8)$$

die Kräftebelegung auf  $(S)$  in  $K^\circ$ , welche auf  $(S)$  gerade die Verschiebung  $w$  hervorbringt, so gilt für den durch (4.1.8) definierten Operator  $\Pi^\circ$  offenbar nach (4.1.1)

$$\Pi^\circ = \Pi^+ + \Pi^- \quad (4.1.9)$$

Wir definieren weiter die zu (4.1.6–8) — in einem noch zu erläuternden Sinne — reziproken Operatoren, welche die Lösung der zweiten Randwertaufgabe an  $K^+$  und  $K^-$  sowie einer Summationsaufgabe in  $K^\circ$  symbolisieren. Zunächst sei

$$w = U^+ P \quad (4.1.10)$$

diejenige Verschiebung auf  $S^+$ , die eine — bis auf gewisse Beschränktheits-, Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen — beliebige Gleichgewichts-Kräftebelegung  $P$  auf  $S^+$  an  $K^+$  hervorruft, und entsprechend wird der Operator  $U^-$  definiert durch die von einer Gleichgewichts-Kräftebelegung  $Q$  auf  $S^-$  an  $K^-$  hervorgerufene Verschiebung

$$w = U^- Q \quad (4.1.11)$$

der Randkurve  $S^-$ . Schließlich sei

$$w = U^\circ R \quad (4.1.12)$$

die Verschiebung der Kurve  $(S)$  in  $K^\circ$  unter der Einwirkung der Gleichgewichts-Kräftebelegung  $R$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$ . Offensichtlich haben die Operatoren  $\Pi^+$ ,  $\Pi^-$  und  $\Pi^\circ$  im ebenen Fall die  $g$ -Dimension (Dimension im Größenskalkül der Physik [79, 80], vgl. S. 145) Kraft/Länge<sup>2</sup>, die Operatoren  $U^+$ ,  $U^-$  und  $U^\circ$  dagegen die  $g$ -Dimension Länge<sup>2</sup>/Kraft.

Löst man an  $K^+$  zunächst nach (4.1.10) die zweite Randwertaufgabe und wendet auf die so bestimmte Randverschiebung den Operator  $\Pi^+$  nach (4.1.6) an (Lösung der ersten Randwertaufgabe), so kommt man — Existenz- und Eindeutigkeitssätze für beide Randwertprobleme vorausgesetzt — auf die Identität

$$P = \Pi^+ U^+ P \quad (4.1.13)$$

Entsprechende Überlegungen für die Gleichungspaare (4.1.7, 11) und (4.1.9, 12) führen auf

$$\Pi^+ U^+ = \Pi^- U^- = \Pi^\circ U^\circ = E \quad (4.1.14)$$

Falls die Lösungen der ersten und der zweiten Randwertaufgabe existieren und eindeutig sind, läßt sich die Reihenfolge der Randwertprobleme in (4.1.13) umkehren. Dann tritt an die Stelle von (4.1.13)

$$w = U^+ \Pi^+ w \quad (4.1.15)$$

und man erhält an Stelle von (4.1.14)

$$U^+ \Pi^+ = U^- \Pi^- = U^\circ \Pi^\circ = E^* \quad (4.1.16)$$

Die Einheitsoperatoren  $E$  und  $E^*$  lassen sich natürlich beide durch die Multiplikation mit der Zahl Eins realisieren; trotzdem wird es sich im folgenden als zweckmäßig erweisen, wenn wir den „Einheitsoperator für die Kräftebelegungen“  $E$  vom „Einheitsoperator für die Verschiebungen“  $E^*$  formal unterscheiden.

Nun ist der Zusammenhang zwischen  $R$  und  $Q$  leicht in symbolische Form zu bringen. Man hat einfach die Kräftebelegung  $Q$  auf  $S^-$  an  $K^-$  aufzusuchen, die dort nach (4.1.7) die von der Kräftebelegung  $R$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  nach (4.1.12) bewirkte Verschiebung hervorbringt. Es ist also

$$Q = (\Pi^- U^\circ) R \quad (4.1.17)$$

Aus der Funktionalgleichung (4.1.1) wird somit

$$[R] = [P] + (\Pi^- U^\circ) [R] \quad (4.1.18)$$

und aus der Iterationsvorschrift (4.1.2–3)

$$R^0 = [P] \quad (4.1.19)$$

$$R^r = (\Pi^- U^\circ) R^{r-1} \quad (4.1.20)$$

oder in der aufsummierten Form (4.1.4)

$$[R]^{n+1} = [P] + (\Pi^- U^\circ) [R]^n \quad (4.1.21)$$

Es wird sich später (§ 4.4) zeigen, daß man den Produktoperator  $\Pi^- U^\circ$  mit Hilfe des *Cauchy*schen Hauptwerts eines singulären Integraloperators darstellen kann. Man bemerkt ferner, daß  $\Pi^- U^\circ$  ein reines Zahlengebilde ist und somit seine Anwendung die  $g$ -Dimension nicht beeinflußt; er eignet sich somit zur iterativen Anwendung (vgl. S. 145).

Für den vom Innengebiet ( $K^+$ ) der Kurve ( $S$ ) aufgenommenen Anteil  $P$  der Kräftebelegung  $R$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  können wir entsprechend (4.1.17) schreiben

$$P = (\Pi^+ U^\circ) R \quad (4.1.22)$$

und man hat nach (4.1.9, 14) die einfache Beziehung

$$\Pi^+ U^\circ + \Pi^- U^\circ = (\Pi^+ + \Pi^-) U^\circ = \Pi^\circ U^\circ = E \quad (4.1.23)$$

Sie ist im Grunde nichts weiter als eine andere Form von (4.1.1).

Die Frage, welchen analytischen Bedingungen die zugelassenen Kräftebelegungen und Verschiebungen unterworfen werden müssen, ist je nach der Art des vorgelegten Problems verschieden zu beantworten; davon hängt es auch ab, welche für einen Existenzbeweis hinreichenden Anforderungen an die Glattheit der Kurve ( $S$ ) gestellt werden müssen. Bei rein numerischer Rechnung muß man z. B. verlangen, daß sämtliche auftretenden Funktionen beschränkt sind; dadurch werden, wie das Beispiel der Spitzkerben [9, 10] zeigt, Ecken in der

Kurve ( $S$ ) bereits unzulässig. Dies schließt natürlich nicht aus, daß man in Einzelfällen auch für eine Spitzkerbe beschränkte Lösungen erhält; ein allgemeiner Existenzbeweis wird jedoch unmöglich. Noch schärfer werden die Anforderungen an die Glattheit der Kurve ( $S$ ), wenn man verlangt, daß das Spannungsfeld überall in  $K^\circ$  mit Ausnahme der Kurve ( $S$ ) analytisch ist und bei Annäherung an ( $S$ ) aus ( $K^+$ ) oder aus ( $K^-$ ) auch in der Grenze analytisch bleibt. So beziehen sich die Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise für die isotrope Scheibe in ([3], S. 347) auf Randkurven mit überall stetig differenzierbarer Krümmung ([3], S. 75) und stückweise differenzierbarer Belastung mit gewissen Beschränktheitsbedingungen an den Ausnahmestellen ([3], S. 90, 127). Auf der anderen Seite kann man die Differenzierbarkeitsbedingungen für ( $S$ ) wesentlich abschwächen, wenn man von den zugelassenen Kräftebelegungen und Verschiebungen nicht mehr Beschränktheit, sondern nur noch beschränkte elastische Energie des zugehörigen Spannungsfeldes verlangt. So bemerkt *Friedrichs* zu seinem Existenzbeweis für die — nach der bekannten Analogie [59–61, 165] der belasteten Scheibe mathematisch äquivalente — eingespannte Platte, daß er sich ohne wesentliche Änderungen auch bei nicht existenter Krümmung durchführen lasse ([131], Fußnote 6, S. 209). Während *Babuška*, *Rektorys* und *Vyčichlo* [3] mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln arbeiten und von der *Lauricella-Schermanschen* Integralgleichung ausgehen, benutzt *Friedrichs* [131] das Prinzip vom Minimum der elastischen Energie. Offenbar sind also auch Ecken zulässig, wenn man nur beschränkte elastische Energie verlangt. Einzelkräfte dagegen besitzen auch keine beschränkte elastische Energie und erfordern sowohl für den Existenz- wie für den Eindeutigkeitsbeweis [102] gesonderte Betrachtungen. Eindeutigkeitsbeweise für verschiedene Randwertaufgaben der eckigen, anisotropen Platte finden sich bei *Töpfer* [132]; auch diese Beweise lassen sich auf analoge Aufgaben bei der Scheibe übertragen.

Wir können im Rahmen dieser Arbeit nicht auf Einzelheiten der Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise eingehen und müssen uns mit vorläufigen Bemerkungen begnügen. Man darf wohl als sicher annehmen, daß für die zweite Randwertaufgabe mit einer beschränkten Kräftebelegung stets eine eindeutige Lösung mit beschränkter elastischer Energie existiert, wenn die Randkurve  $S^+$  bzw.  $S^-$  oder die damit kongruente Kurve ( $S$ ) höchstens eine endliche Zahl von Ecken, aber keine Spitzen besitzt, und dasselbe werden wir für die erste Randwertaufgabe mit differenzierbaren Verschiebungen voraussetzen. Spitzen von ( $S$ ) werden wir in der folgenden Ziffer sowieso ausschließen müssen. Für numerische Rechnungen werden wir zeigen können, daß die zweite Randwertaufgabe an der isotropen Scheibe stets eine beschränkte Lösung hat, wenn die Belastung stetig ist und stückweise analytisch, d. h. beliebig oft nach der Bogenlänge  $s$  differenzierbar, und wenn ferner die Randkurve eine stetige Tangente besitzt und bis auf endlich viele Ausnahmepunkte analytisch ist. Allgemein müssen an die Verschiebung auf ( $S$ ) strengere Anforderungen gestellt werden als an die Kräftebelegung. Denn nach (3.3.13, 14, 18) geht die Kräftebelegung am Rande einer Scheibe über eine Differentiation aus dem Verschiebungsfeld in der Umgebung des Randes hervor; soll also die Kräftebelegung samt der Tangentialspannung am Rande beschränkt sein, so muß die Verschiebung beschränkte Ableitungen besitzen usw.

Andere Einschränkungen der zugelassenen Kräftebelegungen und Verschiebungen ergeben sich aus mechanischen Überlegungen. So muß sich jede Kräftebelegung an einem endlichen Körper im Gleichgewicht befinden, andernfalls kann im Rahmen der Elastostatik keine Lösung existieren. Im folgenden werden wir nun den Realkörper  $K^+$  als eine endliche, einfach oder mehrfach zusammenhängende Scheibe oder als eine unendliche Vollscheibe mit einem oder mehreren einfach zusammenhängenden endlichen Löchern (unendlicher Körper dritter Art nach [3], S. 125) voraussetzen. Wählen wir nun als Grundkörper  $K^\circ$  die unendliche Vollebene, so wird im ersten Fall der Differenzkörper  $K^-$  die unendliche Scheibe mit einem endlichen Loch, wozu bei mehrfachem zusammenhängendem Realkörper  $K^+$  noch einige isolierte, endliche und einfach zusammenhängende Scheiben kommen. Für die unendliche isotrope Scheibe mit einem endlichen, auf den Einheitskreis konform abbildbaren Loch finden sich die benötigten Existenz- und Eindeutigkeitsätze in [3]; die dort vorgeschriebenen Bedingungen für das Verhalten im Unendlichen entsprechen einem Abklingen des Spannungsfeldes mit  $1/r^{1/2}$  in großer Entfernung. Eine beliebige starre Bewegung der unendlichen Scheibe wird hierbei zugelassen; anders wäre die erste Randwertaufgabe unter diesen Bedingungen nicht für beliebige Verschiebungen zu lösen. Andererseits muß nach dieser Vereinbarung die Kräftebelegung ein Gleichgewichtssystem sein. Bei unendlichen Scheiben mit mehreren Löchern hat man dafür zu sorgen, daß Volterra'sche Distorsionszustände (§§ 3.3, 4) nicht auftreten, entweder durch nachträgliche Beseitigung oder durch einen einwertigen Ansatz in Verschiebungsfunktionen. Im zweiten Fall, also für die unendliche Scheibe mit Löchern als Realkörper  $K^+$ , wird aus dem Differenzkörper  $K^-$  eine einfach zusammenhängende Scheibe oder mehrere getrennte Scheiben dieser Art. Die Operatoren (4.1.6–12) sind also auch für unendliche Scheiben mit endlicher Berandung definiert, wenn man beliebige starre Bewegungen im Unendlichen zuläßt. Die Kräftebelegungen an unendlichen Körpern mit endlicher Berandung dürfen dann allerdings auch nur Gleichgewichtssysteme sein; dadurch wird auch die Aufgabenstellung für einen unendlichen Realkörper mit Löchern auf Gleichgewichtsbelastungen eingeschränkt.

Für die folgenden Überlegungen treffen wir jedoch zunächst eine andere Vereinbarung über unendliche Körper, nach welcher an unendlichen Körpern auch Kräftebelegungen zugelassen werden können, die kein Gleichgewichtssystem bilden; man hat sich dann — in anschaulicher Ausdrucksweise — vorzustellen, daß der Kräftebelegung am endlichen Rand des unendlichen Körpers durch ein Kräftesystem im Unendlichen das Gleichgewicht gehalten wird. Eindeutigkeit läßt sich dann erreichen, wenn man verlangt, daß das Spannungsfeld wenigstens mit  $1/r$  im Unendlichen abklingt und außerdem Verschiebung und Drehung in einem fest gewählten Punkt gleich Null setzt; der Existenzbeweis läßt sich auf den Fall der Gleichgewichts-Kräftebelegung zurückführen, wenn man nur das Spannungsfeld irgend einer Kräftebelegung mit entgegengesetzt gleicher resultierender Dynamie kennt. Eine derartige Kräftebelegung läßt sich aber stets konstruieren mit Hilfe der Spannungsfelder von Kraft- und Momentensingularitäten in der unendlichen Vollscheibe [4, 6, 98].



Wir betrachten nun den ersten Fall, nämlich den Fall eines endlichen Realkörpers  $K^+$  und überlegen uns, ob es nichtverschwindende Kräftebelegungen  $R^{\text{starr}}$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  gibt, welche den Bereich  $(K^+)$  spannungsfrei lassen, also weiter nichts bewirken als eine starre Bewegung der gesamten Kurve  $(S)$  in  $K^\circ$ . Wir bezeichnen eine derartige Verschiebung von  $(S)$  durch

$$w^{\text{starr}} \triangleq w_0 + \mathfrak{o} \times (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \quad (4.1.24)$$

wo  $w_0$  ein fester Vektor in der Scheibenebene und  $\mathfrak{o}$  ein fester Vektor senkrecht dazu ist (vgl. (3.3.9)). Es ist jedenfalls

$$P^{\text{starr}} = II^+ w^{\text{starr}} = 0 \quad (4.1.25)$$

andererseits aber im allgemeinen

$$Q^{\text{starr}} = II^- w^{\text{starr}} \neq 0 \quad (4.1.26)$$

denn die starre Bewegung eines Teilbereichs in einem elastischen Körper läßt sich gewiß nicht immer ohne Krafteinwirkung hervorrufen, wenn man Verschiebung und Drehung in einem Festpunkt zu Null gesetzt hat. Nach (4.1.9) ist außerdem

$$Q^{\text{starr}} = II^- w^{\text{starr}} = II^\circ w^{\text{starr}} = R^{\text{starr}} \quad (4.1.27)$$

Wendet man nun den Operator  $II^- U^\circ$  nach (4.1.17) auf  $R^{\text{starr}}$  an, so folgt

$$(II^- U^\circ) R^{\text{starr}} = II^- w^{\text{starr}} = R^{\text{starr}} \quad (4.1.28)$$

Anteile der Form  $R^{\text{starr}}$  reproduzieren sich also bei der Iteration (4.1.19–20) und machen damit das Iterationsverfahren in dieser Form divergent. In der aufsummierten Form (4.1.21) wird ein Anteil des Typs (4.1.27) in  $[R]$  unverändert mitgeführt, während ein derartiger Anteil in  $[P]$  wieder zur Divergenz des Verfahrens führt. Wir bezeichnen deshalb Anteile dieser Form an der Kräftebelegung  $R$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  als „verbotene Anteile“. Zwar tragen diese verbotenen Anteile an sich nichts zu dem gesuchten Spannungsfeld in  $(K^+)$  bei; wenn sie aber bei der Iteration über alle Grenzen wachsen, können sie durch ihr starkes Überwiegen die numerische Rechnung völlig unmöglich machen. Ebenso beeinträchtigen sie die Wirksamkeit der Konvergenzverbesserungsverfahren von § 5. Andererseits können wir aus der eindeutigen Umkehrbarkeit von  $II^- U^\circ$  (§ 4.2) schließen, daß solche verbotenen Anteile, falls sie nicht schon in  $[P]$  enthalten sind, im Laufe der Iteration höchstens durch Rundungsfehler bei numerischer Rechnung neu auftreten können.

Für die praktische Rechnung ist es also wichtig, derartige verbotene Anteile zu erkennen und zu beseitigen. Wir benützen dazu den folgenden

**Satz 1:** Es sei  $(K^+)$  ein endlicher, von der Kurve  $(S)$  berandeter Teilbereich der unendlichen Scheibe  $K^\circ$ . Das Spannungsfeld einer Kräftebelegung auf  $(S)$  soll mindestens mit  $1/|\mathfrak{x}|$  im Unendlichen abklingen, und es seien Verschiebung und Drehung in einem festen Punkt von  $K^\circ$  zu Null gesetzt („Festpunkt“). Es sei ferner  $R^{\text{starr}}$  eine Kräftebelegung auf  $(S)$  in  $K^\circ$ , welche bei einer gewissen Wahl des Festpunktes weiter nichts bewirkt als eine starre Bewegung des Teilbereichs  $(K^+)$ . Dann kann  $R^{\text{starr}}$  keine Gleichgewichts-Kräftebelegung sein.

Praktisch bedeutet dies, daß man das Vorhandensein eines verbotenen Anteils in einer Kräftebelegung  $R$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  stets daran erkennen kann, daß  $R$  die Gleichgewichtsbedingungen nicht erfüllt. Der Beweis stützt sich einmal auf den in der folgenden Ziffer (§ 4.2) bewiesenen Satz 2, nach dem jede nicht verschwindende Kräftebelegung an einem elastischen Körper Arbeit leisten, also eine nicht verschwindende Verschiebung hervorbringen muß, zum andern auf die oben angeführten Eindeutigkeitssätze aus [3], die dort zwar nur für die isotrope Scheibe und unter gewissen analytischen Einschränkungen bewiesen wurden, bei Erweiterung der zugelassenen Funktionenmenge sich aber ohne Zweifel verallgemeinern lassen werden. Nun kann eine Gleichgewichts-Kräftebelegung an einer starren Bewegung von  $(S)$  keine Arbeit leisten, also muß jede nichtverschwindende Gleichgewichts-Kräftebelegung auf  $S^-$  an  $K^-$  eine Verzerrung hervorrufen, im Widerspruch zu der Forderung, daß beim Zusammenfügen von  $K^+$  und  $K^-$  zu  $K^\circ$  der Teilbereich  $(K^+)$  von  $K^\circ$  unverzerrt bleiben soll. Die einzige Gleichgewichts-Kräftebelegung auf  $(S)$ , welche das endliche Innengebiet  $(K^+)$  unverzerrt läßt, ist also die verschwindende Kräftebelegung. Nicht verschwindende Kräftebelegungen von Typ  $R^{\text{starr}}$  sind also ausschließlich unter den Kräftebelegungen zu suchen, welche die Gleichgewichtsbedingungen nicht erfüllen. Entsprechend den drei Freiheitsgraden der ebenen Bewegung lassen sich für jeden gegebenen Bereich sämtliche Kräftebelegungen vom Typ  $R^{\text{starr}}$  nach (4.1.27) aus drei verschiedenen Kräftebelegungen linear kombinieren, nämlich aus einer, die einer Drehung, und zweien, die je einer Translation von  $(K^+)$  in  $K^\circ$  zugehören.

Der zulässige Problemkreis der zweiten Randwertaufgabe wird durch diese Überlegungen nicht eingeschränkt; diese Aufgabe hat an endlichen Körpern sowieso nur eine Lösung, wenn die vorgegebene Kräftebelegung  $[P]$  die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Sie können aber dazu dienen, die bei numerischer Iteration durch Rundungs- und Interpolationsfehler aufgetretenen verbotenen Anteile zu beseitigen. Iteriert man in der numerisch stabilen, aufsummierten Form (4.1.21), so genügt es, eine beliebige Kräftebelegung hinzuzufügen, welche die resultierende Dynamie der verbotenen Anteile gerade aufhebt. Die damit verbundene Verfälschung der Gleichgewichts-Kräftebelegung wird normalerweise so klein sein, daß sie beim Weiteriterieren schnell wieder aufgefangen wird. Die resultierende Kraft der verbotenen Anteile beseitigt man am einfachsten durch konstante Kräftebelegungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung auf  $(S)$ , und das danach noch verbleibende resultierende Moment durch eine konstante Tangentialkraft-Belegung auf  $(S)$ , deren Moment sich durch Multiplikation mit der doppelten Fläche von  $(K^+)$  ergibt.

Im zweiten Fall, nämlich für einen unendlichen Realkörper  $K^+$  mit Löchern, tritt an die Stelle von (4.1.25)

$$Q^{\text{starr}} = \Pi^- w^{\text{starr}} = 0 \quad (4.1.29)$$

während andererseits im allgemeinen

$$P^{\text{starr}} = \Pi^+ w^{\text{starr}} \neq 0 \quad (4.1.30)$$

ist. Aus (4.1.9) folgt nun statt (4.1.27)

$$P^{\text{starr}} = \Pi^+ w^{\text{starr}} = \Pi^\circ w^{\text{starr}} = R^{\text{starr}} \quad (4.1.31)$$

und bei Anwendung des Operators  $\Pi - U^\circ$

$$(\Pi - U^\circ) R^{\text{starr}} = \Pi - w^{\text{starr}} = 0 \quad (4.1.32)$$

Beim unendlichen Realkörper  $K^+$  mit Löchern sind also die Kräftebelegungen vom Typ  $R^{\text{starr}}$  „Nullösungen“ des Operators  $\Pi - U^\circ$ , welche für die Iteration keine besonderen Probleme aufwerfen. Enthält der Realkörper mehrere Löcher, so ist es nicht einmal notwendig, daß sich die gesamte Kurve  $(S)$  in  $K^\circ$  starr bewegt; es genügt, wenn sich die einzelnen getrennten Teile dieser Kurve für sich starr bewegen und damit alle Löcher spannungsfrei bleiben. Für einen unendlichen Realkörper  $K^+$  mit  $n$  Löchern hat also der Operator  $\Pi - U^\circ$  — entsprechend der Zahl der Freiheitsgrade für die Bewegung jedes Lochs — eine genau  $3n$ -parametrische lineare Mannigfaltigkeit von Nullösungen.

Dieselbe Mannigfaltigkeit von Nullösungen hat der Operator  $\Pi - U^\circ$  auch für einen endlichen Realkörper  $K^+$  mit  $n$  Löchern. Hier ist nur die Kräftebelegung auf dem äußeren Teil der Kurve  $(S)$ , welche den gesamten Bereich  $(K^+)$  einschließlich der Lochränder umschließt, stets so zu wählen, daß sie einerseits den Kräftebelegungen an den Lochrändern das Gleichgewicht hält, andererseits aber auch jede Verzerrung des äußeren Teiles von  $(S)$  durch das Spannungsfeld der Kräftebelegungen an den Lochrändern unterbindet. In anderer Ausdrucksweise (§ 2.5): Der Nullraum des Operators  $\Pi - U^\circ$  hat für einen ebenen Realkörper mit  $n$  Löchern genau  $3n$  Dimensionen.

Es liegt auf der Hand, daß sich die meisten Überlegungen dieser Ziffer auf den räumlichen Fall übertragen lassen; die wichtigsten Modifikationen betreffen die Vorschriften über das Verhalten im Unendlichen und die Zahl der Freiheitsgrade einer starren Bewegung. Ferner hat man im Raume zwischen „mehrfachem Zusammenhang“ und „mehrfacher Begrenzung“, also zwischen „Löchern“ und „Hohlräumen“ zu unterscheiden [98]. Eine ins Einzelne gehende Untersuchung für den räumlichen Fall steht jedoch noch aus.

#### 4.2 Das Iterationsverfahren im Zustandsraum. Konvergenzbeweis

In dieser Ziffer stellen wir uns die Aufgabe, einen *Hilbert*-Raum zu finden, in dem der Operator  $\Pi - U^\circ$  symmetrisch ist. Dann kann die Konvergenz des Iterationsverfahrens (4.1.21) nach den Überlegungen von §§ 2.4–6 aus der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen derjenigen Randwert- und Summationsprobleme gefolgert werden, welche wir in (4.1.6–12) durch die Operatoren  $\Pi^+, \Pi^-, \Pi^\circ, U^+, U^-$  und  $U^\circ$  symbolisiert haben. Umgekehrt würde ein Existenzbeweis für die zweite Randwertaufgabe am Realkörper  $K^+$  vorliegen, wenn es gelänge, die Konvergenz des Iterationsverfahrens unabhängig von diesen Existenz- und Eindeutigkeitsvoraussetzungen zu zeigen; Existenz- und Konvergenzbeweise sind also, wie wir in dieser Ziffer zeigen werden, gleichwertig. In § 4.1 haben wir gesehen, daß Kräftebelegungen vom Typ  $R^{\text{starr}}$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$ , welche nichts weiter bewirken als eine starre Bewegung der gesamten Kurve  $(S)$ , mit Ausnahme der verschwindenden Kräftebelegung auf keinen Fall die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen können. Wir haben ferner gesehen, daß im Falle eines endlichen Realkörpers  $K^+$  Kräftebelegungen vom Typ  $R^{\text{starr}}$  als „verbotene Anteile“ unterdrückt werden müssen; man hat

also in diesem Falle stets dafür zu sorgen, daß alle vorkommenden Kräftebelegungen auf  $(S)$  die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Auf der anderen Seite zeigte es sich, daß für die unendliche Scheibe mit endlichen Löchern als Realkörper  $K^+$  eine Kräftebelegung vom Typ  $R^{\text{starr}}$  eine Nulllösung des Operators  $\Pi^- U^\circ$  darstellt, also den Verlauf des Iterationsverfahrens nicht beeinflußt. Wir können also die folgenden Überlegungen ohne eine Einbuße an Allgemeingültigkeit auf Kräftebelegungen einschränken, welche die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, und deren Spannungsfelder in einem unendlichen Körper mit  $1/|x|^2$  nach außen abklingen. Entsprechend beschränken wir uns auf Verschiebungsfelder, wie sie von einer Gleichgewichts-Kräftebelegung hervorgebracht werden können; dieser Forderung läßt sich jede vorgegebene Verschiebung  $w$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  auch nach Wahl eines Festpunktes mit verschwindender Verschiebung und Drehung anpassen, wenn man nur eine geeignete starre Bewegung der unendlichen Vollscheibe hinzufügt. Dasselbe gilt für vorgeschriebene Randverschiebungen von  $K^+$  und  $K^-$ .

Bei dieser Einschränkung auf Gleichgewichts-Kräftebelegungen besitzen die Operatoren  $U^+$ ,  $U^-$  und  $U^\circ$  in einem „Kräftebelegungsraum“ — d. h. dem Funktionenraum der Gleichgewichts-Kräftebelegungen — eine wichtige Symmetrieeigenschaft, welche wir aus Satz 3, § 3.4 (Betti-Rayleighsche Identität) ableiten. Danach ist die Arbeit, welche ein Kräftesystem  $\hat{R}$  in einem elastischen Körper an den von einem anderen Kräftesystem  $\hat{\hat{R}}$  hervorgerufenen Verschiebungen leistet, gleich der Arbeit des Kräftesystems  $\hat{R}$  an den vom Kräftesystem  $\hat{\hat{R}}$  im selben Körper hervorgerufenen Verschiebungen und außerdem gleich der Wechselwirkungsenergie der beiden zugehörigen Lastspannungszustände. Da wir ein Abklingen des Spannungsfeldes im Unendlichen mit  $1/|x|^2$ , also des Verschiebungsfeldes mit  $1/|x|$ , vorausgesetzt haben, kann eine „unendlich ferne Oberfläche“ keinen Beitrag liefern, und wir können diesen Satz ohne weiteres auch auf unsere unendlichen Scheiben anwenden. Verstehen wir also unter dem Skalarprodukt

$$\{\hat{w}, \hat{R}\} = \{\hat{R}, \hat{\hat{w}}\} = \oint_{(S)} \hat{R}_i(s) \hat{\hat{w}}_i(s) ds \quad (4.2.1)$$

die Arbeit der Kräftebelegung  $\hat{R}$  auf der Kurve  $S^+$ ,  $S^-$  oder  $(S)$  an der Verschiebung  $\hat{\hat{w}}$ , so liefert die Anwendung von Satz 3, § 3.4, auf den Realkörper  $K^+$  mit den Kräftebelegungen  $\hat{P}$ ,  $\hat{\hat{P}}$

$$\{\hat{P}, U^+ \hat{\hat{P}}\} = \{\hat{\hat{P}}, U^+ \hat{P}\} = \{\hat{\hat{P}} U^+, \hat{P}\} \quad (4.2.2)$$

auf den Differenzkörper  $K^-$  mit den Kräftebelegungen  $\hat{Q}$ ,  $\hat{\hat{Q}}$

$$\{\hat{Q}, U^- \hat{\hat{Q}}\} = \{\hat{\hat{Q}}, U^- \hat{Q}\} = \{\hat{\hat{Q}} U^-, \hat{Q}\} \quad (4.2.3)$$

und auf den Grundkörper  $K^\circ$  mit den Kräftebelegungen  $\hat{R}$ ,  $\hat{\hat{R}}$

$$\{\hat{R}, U^\circ \hat{\hat{R}}\} = \{\hat{\hat{R}}, U^\circ \hat{R}\} = \{\hat{\hat{R}} U^\circ, \hat{R}\} \quad (4.2.4)$$

In Anlehnung an (2.4.12) können wir also schreiben

$$U^+ P = P U^+ = w \quad (4.2.5)$$

$$U^- Q = Q U^- = w \quad (4.2.6)$$

$$U^\circ R = R U^\circ = w \quad (4.2.7)$$

In derselben Weise leiten wir für die Operatoren  $\Pi^+$ ,  $\Pi^-$  und  $\Pi^\circ$  im „Verschiebungsraum“ — d. h. dem Funktionenraum der Verschiebungen von  $S^+$ ,  $S^-$  oder  $S^\circ$  — die folgenden Symmetriebeziehungen ab

$$\{\hat{w}, \Pi^+ \hat{w}\} = \{\hat{w}, \Pi^+ \hat{w}\} = \{\hat{w} \Pi^+, \hat{w}\} \quad (4.2.8)$$

$$\{\hat{w}, \Pi^- \hat{w}\} = \{\hat{w}, \Pi^- \hat{w}\} = \{\hat{w} \Pi^-, \hat{w}\} \quad (4.2.9)$$

$$\{\hat{w}, \Pi^\circ \hat{w}\} = \{\hat{w}, \Pi^\circ \hat{w}\} = \{\hat{w} \Pi^\circ, \hat{w}\} \quad (4.2.10)$$

oder in Anlehnung an (2.4.12)

$$\Pi^+ w = w \Pi^+ = P \quad (4.2.11)$$

$$\Pi^- w = w \Pi^- = Q \quad (4.2.12)$$

$$\Pi^\circ w = w \Pi^\circ = R \quad (4.2.13)$$

Die Gleichungen (4.2.11–13) können nach (4.1.14, 16) als Umkehrungen der Gleichungen (4.2.5–7) aufgefaßt werden; durch die in allen diesen sechs Formeln gleiche Verschiebung  $w$  haben wir die Kompatibilitätsbedingung auf  $(S)$  in  $K^\circ$  berücksichtigt, nach welcher die Verschiebung auf  $(S)$  in  $K^\circ$  eindeutig sein muß und nicht etwa bei Annäherung aus  $(K^+)$  oder  $(K^-)$  verschiedenen Grenzwerten zustreben darf. Dagegen ist die homogene Gleichgewichtsbedingung auf  $(S)$  in  $K^\circ$  nicht erfüllt, wenn dort eine nicht verschwindende Kräftebelegung  $R$  angreift, so daß die Kräftebelegungen  $P$  an einem Schnitt „dicht innerhalb“ von  $(S)$  nach

$$P + Q = R \quad (4.2.14)$$

von den negativ genommenen Kräftebelegungen  $Q$  an einem Schnitt „dicht außerhalb“ von  $(S)$  verschieden sein müssen. Dies haben wir in den Bezeichnungen (4.2.5–7, 11–13) ebenfalls berücksichtigt.

Wir benötigen nun den folgenden

**Satz 2:** Ist die Kurve  $(S)$  in  $K^\circ$  (bzw.  $S^+$  an  $K^+$  oder  $S^-$  an  $K^-$ ) glatt bis auf endlich viele Ecken, aber frei von Selbstberührungen und Spitzen, und ist ferner die quadratische Form (vgl. (3.1.15))

$$\sigma \cdots \sigma \cdots \sigma \geq S \sigma \cdots \sigma \quad \text{für } S > 0, \text{ konstant} \quad (4.2.15)$$

in  $K^\circ$  (bzw.  $K^+$  oder  $K^-$ ) überall eigentlich positiv definit, so leistet eine nicht verschwindende, stückweise stetige Gleichgewichts-Kräftebelegung auf  $(S)$  (bzw.  $S^+$  oder  $S^-$ ) an  $K^\circ$  (bzw.  $K^+$  oder  $K^-$ ) an der von ihr hervorgerufenen Verschiebung stets eine positive, nicht verschwindende Arbeit.

Zum Beweis wenden wir zuerst den Satz 3 von § 3.4 auf  $K^+$  an. Setzen wir in (3.4.18)  $\hat{w} = \hat{\hat{w}} = w$ , so wird aus  $\{\hat{f}, \hat{\hat{f}}\}$  nach dem *Clapeyronschen* Satz ([2], S. 86) die doppelte elastische Energie im Gleichgewichtszustand unter der Einwirkung der angreifenden Kräfte; sie ist gleich der Arbeit, die ein zeitlich langsam veränderliches Kräftesystem leistet, wenn es von Null beginnend bei währendem Gleichgewicht zu dem vorgeschriebenen Endwert anwächst. Außerdem verschwinden die Volumenintegrale der zweiten Zeile von (3.4.18), da nach Voraussetzung die Kräfte nur auf dem Rand  $S^+$  angreifen, und von einem „unendlich fernen Rand“ kann wegen des vorausgesetzten raschen Abklingens des Spannungs- und des Verschiebungsfeldes nach außen kein Beitrag kommen. Nun erfüllt das Spannungsfeld im Innern die homogene Gleichgewichtsbedingung

$$\text{Div } \sigma = 0 \quad (4.2.16)$$

und die homogene Kompatibilitätsbedingung (*Beltramische* Gleichung)

$$\text{Ink } (g \cdot \cdot g) = 0 \quad (4.2.17)$$

(vgl. § 3.3). Also muß  $\sigma$  im Innern von  $K^+$  differenzierbar, und damit erst recht stetig sein. Auf dem Rande gilt nun die Bedingung

$$n \cdot \sigma = \mathfrak{P} \triangleq n_i \sigma_{ij} = P_j \quad (4.2.18)$$

Also können nicht alle Komponenten von  $\sigma$  verschwinden auf einem Teil des Randes, wo die Kräftebelegung stetig ist und nicht verschwindet, und damit muß  $\sigma$  wegen der Differenzierbarkeit im Innern auch in einer einseitigen Umgebung dieses Randstücks von Null verschieden, also die doppelte elastische Energiedichte (4.2.15) positiv sein, falls eine solche einseitige Umgebung im Innern von  $K^+$  für jeden Punkt von  $S^+$  existiert. Das ist aber sicher der Fall, wenn  $S^+$  stückweise glatt ist und an den Ausnahmestellen höchstens Ecken besitzt. Es ist sicher nicht der Fall, wenn sich  $S^-$  über eine endliche Bogenlänge von innen selbst berührt. Punktweise Selbstberührung und Spitzen würden besondere Untersuchungen erfordern, auf die wir hier verzichten. Entsprechende Überlegungen gelten für den Differenzkörper  $K^-$ , und für  $(S)$  in  $K^\circ$  überlegt man, daß nach (4.2.14) die auf den Teilbereich  $(K^+)$  wirkende Kräftebelegung  $P$  und die auf den Teilbereich  $(K^-)$  wirkende Kräftebelegung  $Q$  nur dann gleichzeitig verschwinden können, wenn auch  $R$  verschwindet. Im übrigen schließt man weiter wie oben.

Hängen nun die Funktionen  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  und  $w$  nach (4.2.5–7) zusammen, treffen die Voraussetzungen von Satz 2 zu, und ist ferner

$$P, Q, R \neq 0, \quad w \neq w^{\text{starr}} \quad (4.2.19)$$

schließen wir also neben den verbotenen Anteilen auch die Nulllösungen von  $\Pi^- U^\circ$  bei mehrfach zusammenhängendem Realkörper (§ 4.1, Schluß) aus, so gelten für die doppelte elastische Energie in  $(K^+)$ ,  $(K^-)$  und  $K^\circ$  die folgenden Definitheitsbeziehungen

$$\{P, U^+ P\} = \{w, \Pi^+ w\} > 0 \quad (4.2.20)$$

$$\{Q, U^- Q\} = \{w, \Pi^- w\} > 0 \quad (4.2.21)$$

$$\{R, U^\circ R\} = \{w, \Pi^\circ w\} > 0 \quad (4.2.22)$$

Wir untersuchen nun, ob sich einer dieser Ausdrücke als Normquadrat für den Funktionenraum unseres Iterationsverfahrens eignet.

Zunächst sind ohne Zweifel die Produktoperatoren

$$U^\circ (\Pi^- U^\circ) = U^\circ \Pi^- U^\circ \quad (4.2.23)$$

und

$$(\Pi^- U^\circ) \Pi^\circ = \Pi^- \quad (4.2.24)$$

in einem rein formalen Sinn symmetrisch. Es ist ferner

$$v = w (\Pi^- U^\circ) = R U^\circ \Pi^- U^\circ = U^\circ \Pi^- U^\circ R = U^\circ Q \quad (4.2.25)$$

diejenige Verschiebung, welche die Kräftebelegung  $Q = (\Pi^- U^\circ) R$  hervorruft wenn man sie auf  $(S)$  in  $K^\circ$  anbringt. Man könnte also — wiederum rein formal — den Operator  $\Pi^- U^\circ$  als linksseitig mit  $U^\circ$  symmetrisierbar betrachten in einem Kräftebelegungsraum mit dem Normquadrat  $\{R, R\}$  und als rechtsseitig mit  $\Pi^\circ$  symmetrisierbar in einem Verschiebungsraum mit dem Normquadrat  $\{w, w\}$ . Jedoch entspricht weder der Operator  $U^\circ$  noch der Operator  $\Pi^\circ$  den Anforderungen, die wir an die symmetrisierenden Operatoren  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{G}$  in (2.4.42–48) gestellt haben. So läßt sich  $U^\circ$  als Integraloperator mit logarithmisch, also schwach singulärem Kern [40, 41] darstellen (§ 4.4. A, S. 241) er ist also, wenn man nur die Zahlenwerte, nicht aber die  $g$ -Dimension betrachtet, vollstetig, und sein Spektrum hat im Kräftebelegungsraum mit dem Normquadrat  $\{R, R\}$  keine positive untere Grenze, im Widerspruch zu der im Anschluß an (2.4.42) gemachten Voraussetzung. Auf der anderen Seite ist der Operator  $\Pi^\circ$  im Verschiebungsraum mit dem Normquadrat  $\{w, w\}$  — wieder unter ausschließlicher Betrachtung der Zahlenwerte — nicht beschränkt, kann also — trotz der Symmetriebeziehungen (4.2.11–13) — nicht in dem in § 2.4 definierten Sinne symmetrisch sein. Ein vollstetiger Operator iann nicht im selben Funktionenraum eine beschränkte Inverse besitzen (k2.4.28); die Reziprozitätsbeziehungen (4.1.14, 16) müssen also in einem anderen (Sinne verstanden werden).

Eine befriedigende Formulierung gelingt erst, wenn wir auf jeden Versuch verzichten, den Definitionsbereich und den Bildraum der Operatoren  $U^\circ$ ,  $\Pi^\circ$  usw. in demselben Funktionenraum unterzubringen, was wegen der von Eins verschiedenen  $g$ -Dimension dieser Operatoren ohnehin nur für die Zahlenwerte möglich, also physikalisch sinnlos wäre. Es wäre auch mathematisch unbefriedigend, da nach den vorausgesetzten Eindeutigkeits- und Existenzsätzen Kräftebelegungen und Verschiebungen auf  $(S)$  in  $K^\circ$  (bzw. auf  $S^+$  an  $K^+$  oder auf  $S^-$  an  $K^-$ ) umkehrbar eindeutig einander zugeordnet sind, andererseits aber bereits bei Betrachtung der Zahlenwerte allein die Verschiebungen und die Kräftebelegungen verschiedene Funktionenmengen umfassen (§ 4.1). Dies kommt auch in der Vollstetigkeit von  $U^\circ$  und der Nichtbeschränktheit von  $\Pi^\circ$  im Hinblick auf die Zahlenwerte zum Ausdruck.

Wir betrachten also den Raum der Kräftebelegungen und den Raum der Verschiebungen auf  $(S)$  in  $K^\circ$  als zwei verschiedene Funktionenräume, deren

Elemente  $R$  bzw.  $w$  durch die Operatoren  $U^\circ$  und  $\Pi^\circ$  umkehrbar eindeutig aufeinander abgebildet werden.  $U^\circ$  ist im Kräftebelegungsraum erklärt und ordnet jedem Element  $R$  des Kräftebelegungsraums genau ein Element  $w$  des Verschiebungsraums zu;  $\Pi^\circ$  andererseits ist im Verschiebungsraum erklärt und ordnet jedem Element  $w$  des Verschiebungsraums genau ein Element  $R$  des Kräftebelegungsraums zu, und zwar so, daß diese Zuordnungen umkehrbar eindeutig werden. Damit sind auch die Reziprozitätsbeziehungen (4.1.14, 16) in einwandfreier Weise erklärt. Entsprechendes gilt auch für die Operatoren  $U^+$ ,  $U^-$  einerseits und  $\Pi^+$ ,  $\Pi^-$  andererseits.

Und nun betrachten wir die Kräftebelegung  $R$  sowie die dadurch hervorgerufene Verschiebung  $w$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  im Sinne von § 3.1 als gleichwertige Repräsentationen eines und desselben elastischen Zustandes  $g$  des Grundkörpers  $K^\circ$ . Offenbar sind diese elastischen Zustände  $g$  Elemente des in §§ 3.4–5 eingeführten Raumes der Lastspannungszustände in  $K^\circ$ , und zwar umfassen sie gerade den Unterraum derjenigen Lastspannungszustände beschränkter elastischer Energie, welche durch eine Gleichgewichts-Kräftebelegung  $R$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  hervorgerufen werden können. Wir werden diesen Unterraum im folgenden kurz als „Zustandsraum  $S$ “ bezeichnen.

Die Räume der Kräftebelegungen und der Verschiebungen werden nur noch als zwei dem Zustandsraum  $S$  zugeordnete „Repräsentationsräume“ aufgefaßt, deren Skalarprodukt nicht weiter interessiert. Im Zustandsraum  $S$  definieren wir nun wie in § 3 als Skalarprodukt die elastische Wechselwirkungsenergie zweier Zustände  $\hat{g}$  und  $\hat{\hat{g}}$ ; mit (4.2.4, 10) ist demnach

$$\langle \hat{g}, \hat{\hat{g}} \rangle = \langle \hat{R}, U^\circ \hat{\hat{R}} \rangle = \langle \hat{w}, \Pi^\circ \hat{\hat{w}} \rangle \quad (4.2.26)$$

Daß dieses Skalarprodukt den Forderungen (2.3.1–3) genügt, ist leicht nachzuprüfen; nach (4.2.22) ist auch (2.3.4) erfüllt. Der Zustandsraum  $S$  ist also ein Hilbert-Raum, was nach seiner Definition als Unterraum des Raumes der Lastspannungszustände im allgemeinen Zustandsraum von § 3 auch zu erwarten war. Damit hat für die „Algebra“ der elastischen Zustände von  $K^\circ$  der Übergang von der Kräftebelegung  $R$  zur Verschiebung  $w$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  nach

$$w = U^\circ R \quad \text{bzw.} \quad R = \Pi^\circ w \quad (4.2.27)$$

keine größere Bedeutung als in der Matrizenrechnung [68, 69] der Übergang von Spaltenvektoren zu Zeilenvektoren und umgekehrt. Wir werden uns dies für die Konvergenzbeschleunigungsverfahren des nächsten Paragraphen zunutze machen. Ein praktischer Unterschied zwischen  $U^\circ$  und  $\Pi^\circ$  besteht nur insofern, als sich  $U^\circ$  mit Hilfe der Fundamentallösung unmittelbar als Integraltransformation darstellen läßt, während die Anwendung von  $\Pi^\circ$  im allgemeinen gleichbedeutend ist mit der Lösung der ersten Randwertaufgabe an  $K^+$  und  $K^-$ . Das Iterationsverfahren (4.1.21) in den Kräftebelegungen

$$[R]^{n+1} = [P] + (\Pi^- U^-) [R]^n \quad (4.2.28)$$



oder das nach (4.2.25) äquivalente Iterationsverfahren in den Verschiebungen

$$[w]^{n+1} = [v] + [w]^n (\Pi^- U^\circ) \quad (4.2.29)$$

mit

$$[v] = U^\circ [P] \quad (4.2.30)$$

fassen wir nun auf als Darstellung des Iterationsverfahrens

$$[g]^{n+1} = [g^*] + \mathfrak{B}^S [g]^n \quad (4.2.31)$$

mit festem  $[g^*]$  im Zustandsraum  $S$ . Und zwar ist (4.2.28) die Darstellung von (4.2.31) im Repräsentationsraum der Kräftebelegungen, und (4.2.29) die Darstellung im Repräsentationsraum der Verschiebungen auf  $(S)$  in  $K^\circ$ . Der Operator  $\Pi^- U^\circ$  ist nun im Zustandsraum  $S$  mit dem Skalarprodukt (4.2.26) symmetrisch, denn nach (4.2.23) gilt für zwei beliebige Zustände  $\hat{g}$  und  $\hat{g}$

$$\{\hat{g}, \mathfrak{B}^S \hat{g}\} = \{\hat{R}, U^\circ (\Pi^- U^\circ) \hat{R}\} = \{\hat{w}, \Pi^- \hat{w}\} = \{\hat{w}, \Pi^- \hat{w}\} = \{\hat{g}, \mathfrak{B}^S \hat{g}\} \quad (4.2.32)$$

oder entsprechend bei der Rechtsanwendung auf die Verschiebungen nach (4.2.25)

$$\{\hat{g}, \mathfrak{B}^S \hat{g}\} = \{\hat{w} (\Pi^- U^\circ) \Pi^\circ, \hat{w}\} = \{\hat{w}, \Pi^- \hat{w}\} = \{\hat{w}, \Pi^- \hat{w}\} = \{\hat{g}, \mathfrak{B}^S \hat{g}\} \quad (4.2.33)$$

Damit lassen sich die formalen Rechenregeln (2.4.42–48) und die Spektraltheorie symmetrisierbarer Operatoren auch auf den Operator  $\Pi^- U^\circ$  übertragen; im Zustandsraum  $S$  mit dem Skalarprodukt (4.2.26) muß er demnach ein reelles Spektrum besitzen. Daß er in diesem Funktionenraum beschränkt ist, folgt sofort aus der physikalischen Bedeutung des *Rayleigh*-Quotienten  $\mu_g$ . Denn es ist

$$\mu_g = \frac{\{g, \mathfrak{B}^S g\}}{\{g, g\}} = \frac{\{w, \Pi^- w\}}{\{w, \Pi^\circ w\}} = \frac{\{w, Q\}}{\{w, R\}} = \frac{\{R, U^\circ Q\}}{\{R, U^\circ R\}} \quad (4.2.34)$$

gerade der Bruchteil der doppelten elastischen Energie des Zustandes  $g$  in  $K^\circ$ , welcher auf das Teilgebiet  $(K^-)$  von  $K^\circ$  entfällt. Er kann also höchstens gleich Eins sein.

Beim Konvergenzbeweis ist nun nach § 2.6 zu zeigen, daß  $\mu_g$  eine obere Schranke kleiner als Eins hat. Nach Corollar 5.2 von § 2.5 ist das gleichbedeutend mit der Forderung, daß der Operator

$$\Pi^+ U^\circ = E - \Pi^- U^\circ \quad (4.2.35)$$

aus (4.1.22) eine positive untere Grenze hat. Nun ist  $\Pi^+ U^\circ$  wegen  $\mu_g \leq 1$  sicher nicht-negativ definit. Eine Nulllösung kann der Operator  $\Pi^+ U^\circ$  nach Ausschluß der verbotenen Anteile von § 4.1 auch nicht mehr haben, und es ist nur noch zu zeigen, daß der positive *Rayleigh*-Quotient von  $\Pi^+ U^\circ$

$$\alpha_g = 1 - \mu_g \quad (4.2.36)$$

nicht beliebig nahe an Null herankommen kann. Das ist aber sicher der Fall,

wenn  $\Pi^+ U^\circ$  im selben Zustandsraum  $S$  eine Inverse besitzt (vgl. (2.4.35)). Eine solche Inverse läßt sich aber immer dann konstruieren, wenn die durch  $U^+$  und  $\Pi^+$  symbolisierten Randwertaufgaben für die zugelassenen Kräftebelegungen und Verschiebungen stets eine eindeutige Lösung haben. Es ist dann

$$(\Pi^+ U^\circ)^{-1} = \Pi^\circ U^+ \quad (4.2.37)$$

denn es gilt nach (4.1.14, 16)

$$(\Pi^+ U^\circ)^{-1} (\Pi^+ U^\circ) = \Pi^\circ U^+ \Pi^+ U^\circ = \Pi^\circ E^* U^\circ = E$$

$$\text{bzw. } (\Pi^+ U^\circ) (\Pi^+ U^\circ)^{-1} = \Pi^+ U^\circ \Pi^\circ U^+ = \Pi^+ E^* U^+ = E \quad (4.2.38)$$

Die Konvergenz des Iterationsverfahrens ist also gesichert in allen Fällen, in denen die benötigten Existenz- und Eindeutigkeitssätze für  $K^+$  und  $K^-$  vorliegen, d. h. also insbesondere nach ([3], S. 340ff.) für „hinreichend glattes“ ( $S$ ) und „hinreichend glatte“ Kräftebelegungen und Verschiebungen ([3], S. 75, 90, 127) an einer isotropen Scheibe. Wahrscheinlich lassen sich diese Überlegungen im Anschluß an die Untersuchungen von *Friedrichs* [131] und *Töpfer* [132] auch auf eckige und anisotrope Scheiben erweitern. In den folgenden Ziffern werden wir noch einen unabhängigen Konvergenzbeweis für isotrope Scheiben mit glattem Rand und stetige Kräftebelegungen geben.

Wir entnehmen daraus weiter, daß der Operator

$$\mathfrak{A}^S = \mathfrak{E} - \mathfrak{B}^S \triangleq \Pi^+ U^\circ = E - \Pi^- U^\circ \quad (4.2.39)$$

im Zustandsraum  $S$  eigentlich positiv definit ist. Somit läßt sich nach (2.6.22) die Gleichung

$$\mathfrak{A}^S [g] = [g^*] \triangleq (\Pi^+ U^\circ) [R] = [P] \quad (4.2.40)$$

gegen deren Lösung das Iterationsverfahren (4.2.31) konvergiert, auffassen als *Eulersche* Gleichung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2} \{[g], \mathfrak{A}^S [g]\} - \{[g], [g^*]\} = \min ([g]) \quad (4.2.41)$$

In den Kräftebelegungen und Verschiebungen auf ( $S$ ) in  $K^\circ$  ausgedrückt geht (4.2.41) über in

$$\frac{1}{2} \{[w], \Pi^+ U^\circ [R]\} - \{[w], [P]\} = \min ([R]) \quad (4.2.42)$$

mit

$$[w] = U^\circ [R] \quad (4.2.43)$$

(4.2.42) ist aber nichts anderes als das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie im Teilbereich ( $K^+$ ) von  $K^\circ$  und somit auch in  $K^+ [1, 2, 31-37, 109-110]$ .

Denn offenbar ist

$$\frac{1}{2} \{[w], \Pi^+ U^\circ [R]\} = \frac{1}{2} \{[w], \Pi^+ [w]\} \quad (4.2.44)$$

die elastische Energie im Teilbereich ( $K^+$ ) von  $K^\circ$  und das zweite Glied von (4.2.42) die Arbeit, die die gegebenen Kräfte  $[P]$  an der variablen Verschiebung  $[w]$  leisten. Wir haben also in (4.2.42) nur ein bekanntes Variationsprinzip in den Kräftebelegungen und Verschiebungen auf ( $S$ ) in  $K^\circ$  formuliert. Aus dieser Formulierung werden wir in § 5 einige Konvergenzverbesserungsverfahren in bekannter Weise herleiten.

Mit (4.2.38) ist zwar die Konvergenz des Iterationsverfahrens gezeigt; über die Schnelligkeit der Konvergenz läßt sich daraus jedoch noch nichts entnehmen. Einen ersten groben Anhalt gewinnt man aus der physikalischen Bedeutung des *Rayleigh-Quotienten* (4.2.34); das Verfahren wird danach um so schneller konvergieren, je kleiner der auf ( $K^-$ ) entfallende Anteil der elastischen Energie der jeweiligen Spannungsfelder ist. In ganz grober Abschätzung wird man danach um so bessere Konvergenz erwarten können, je „steifer“ sich ( $K^+$ ) relativ zu ( $K^-$ ) gegenüber der gegebenen Belastung verhält. In Abb. 4.2.1 sind einige Beispiele gezeichnet. So wird man etwa erwarten können,

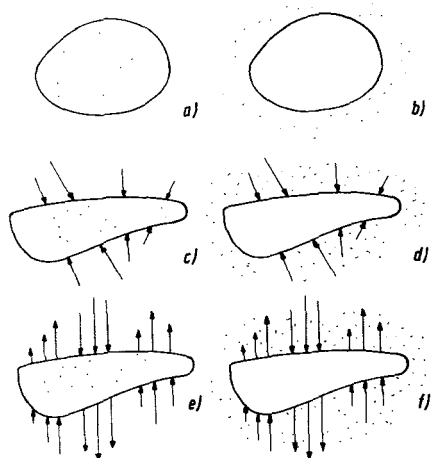


Abb. 4.2.1. Zur Abhängigkeit der Konvergenzabschätzung von Bereichsform und Belastung

daß man mit dem Realkörper (a) für allseitigen Druck oder Zug bessere Konvergenz erreichen wird als für den unendlichen gelochten Realkörper (b). Für allgemeine Belastungen sind die Realkörper (a) und (b), wie sich zeigen wird, im Hinblick auf die Konvergenz des Iterationsverfahrens etwa gleichwertig. Wesentliche Unterschiede werden vor allem bei langgestreckten Realkörpern einerseits und unendlichen Realkörpern mit langgestreckten Löchern andererseits auftreten. So führt etwa der Belastungsfall (c) an einer langgestreckten Scheibe sicher auf bessere Konvergenz als der Belastungsfall (d) an einem Loch von gleicher Form, denn im ersten Fall (c) geht beim Aufbringen der Belastung im Grundkörper  $K^\circ$  der größere Teil der elastischen Energie sicher in den Teilbereich ( $K^+$ ); im zweiten Fall (d) aber sind ( $K^+$ ) und ( $K^-$ ) gegenüber (c) vertauscht. Auf der anderen Seite dürfte eine im

wesentlichen „biegende“ Belastung im Fall (e) sicher schlechter konvergieren als im Fall (f). Freilich hat man damit noch keine zahlenmäßige Abschätzung für den Konvergenzfaktor; auch hat man zu bedenken, daß nach einigen Iterationsschritten das Bild der Belastung völlig anders aussehen kann. Nach einer bekannten Gesetzmäßigkeit [68, 69, 130] werden sogar im Laufe der Iteration die schlecht konvergenten Anteile der Belastung immer stärker hervortreten. Immerhin erlauben solche Überlegungen wenigstens eine grobqualitative Voraussage für den nächsten Iterationsschritt. Etwas zuverlässigere Aussagen suchen wir nun im folgenden durch Untersuchung des Spektrums von  $\Pi - U^\circ$  in zwei einfachen Sonderfällen zu gewinnen.

#### 4.3 Das Eigenwertproblem für $\Pi - U^\circ$ . Eigenfunktionen für die isotrope Halbebene und die isotrope Kreisscheibe

Wir haben in der letzten Ziffer gesehen, daß sich die Anwendung des Operators  $\Pi - U^\circ$  von links auf eine Kräftebelegung  $R$  und die Anwendung von rechts auf eine Verschiebung  $w$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  auffassen lassen als die Darstellung der Anwendung eines symmetrischen Operators  $\mathfrak{B}^S$  auf ein Element  $g$  des Zustandsraums  $S$  aller Lastspannungszustände beschränkter elastischer Energie im Grundkörper  $K^\circ$ , welche durch eine Gleichgewichts-Kräftebelegung auf  $(S)$  in  $K^\circ$  hervorgerufen werden können. Das Skalarprodukt im Zustandsraum  $S$  ist durch (4.2.26) erklärt. Nach § 2.4 muß nun der Operator  $\mathfrak{B}^S$  und damit auch seine Darstellung  $\Pi - U^\circ$  im Zustandsraum  $S$  ein reelles Spektrum besitzen; gehören zu diesem Spektrum Eigenwerte  $\mu_i$  mit Eigelementen  $g^{(i)}$  nach (2.4.14–18), so erfüllen sie die Gleichung

$$\mathfrak{B}^S g^{(i)} = \mu_i g^{(i)} \quad (4.3.1)$$

oder in der „Kräftebelegungsform“

$$(\Pi - U^\circ) R^{(i)} = \mu_i R^{(i)} \quad (4.3.2)$$

und in der „Verschiebungsform“

$$w^{(i)} (\Pi - U^\circ) = \mu_i w^{(i)} \quad (4.3.3)$$

wobei die Kräftebelegungsform und die Verschiebungsform miteinander verknüpft sind durch

$$w^{(i)} = U^\circ R^{(i)} \quad \text{bzw.} \quad R^{(i)} = \Pi^\circ w^{(i)} \quad (4.3.4)$$

Anschaulich bedeutet die Gleichung (4.3.2), daß sich für eine Eigenfunktion von  $\Pi - U^\circ$  die Kräftebelegung  $R^{(i)}$  und ihr vom Außengebiet aufgenommener Anteil  $Q^{(i)}$  nur durch den konstanten Zahlfaktor  $\mu_i$  unterscheiden.

Die nach (2.4.15) normierten Eigenfunktionen erscheinen jetzt in der Kräftebelegungsform als

$$\langle i \rangle R = \frac{R^{(i)}}{\sqrt{\{R^{(i)}, U^\circ R^{(i)}\}}} = \frac{R^{(i)}}{\sqrt{\{w^{(i)}, R^{(i)}\}}} \quad (4.3.5)$$

und in der Verschiebungsform als

$$\begin{matrix} \langle i \rangle \\ w \end{matrix} = \frac{\begin{matrix} (i) \\ w \end{matrix}}{\sqrt{\left\{ \begin{matrix} (i) \\ w, \Pi^\circ w \end{matrix} \right\}}} = \frac{\begin{matrix} (i) \\ w \end{matrix}}{\sqrt{\left\{ \begin{matrix} (i) \\ w, R \end{matrix} \right\}}} \quad (4.3.6)$$

Aus der Orthogonalitätsrelation (2.4.16) wird jetzt

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \langle i \rangle \\ g, g \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} \langle i \rangle \\ R, U^\circ R \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \langle i \rangle \\ w, \Pi^\circ w \end{matrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{matrix} \langle i \rangle \\ w, R \end{matrix} \right\} = \oint_{(S)} \begin{matrix} \langle i \rangle \\ w_\alpha(s) \end{matrix} \begin{matrix} \langle j \rangle \\ R_\alpha(s) \end{matrix} ds = \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

wo für die Vektorindizes  $\alpha$  die Summationsvereinbarung gilt und  $\delta_{ij}$  das *Kronecker*-Symbol bedeutet. Orthogonalität zweier Zustände bedeutet also physikalisch, daß ihre Wechselwirkungsenergie verschwindet.

Ist der Zustand  $g$  mit den Darstellungsfunktionen  $R$  und  $w$  ein Eigenelement des Operators  $\mathfrak{B}^S \triangleq \Pi - U^\circ$ , so ist er nach (4.2.39) und Satz 5, § 2.5 auch ein Eigenelement des Operators  $\mathfrak{Q}^S \triangleq \Pi + U^\circ$  mit dem Eigenwert

$$\varkappa_i = 1 - \mu_i \quad (4.3.8)$$

Schwieriger ist die Frage zu beantworten, ob der Operator  $\Pi - U^\circ$  überhaupt Eigenwerte und Eigenfunktionen besitzt. Bevor wir diese Frage in etwas allgemeinerer Form untersuchen, wollen wir zunächst einmal die Eigenfunktionen in zwei einfachen Sonderfällen bestimmen. Der erste dieser beiden Fälle, nämlich die isotrope Halbebene, gehört zwar nicht zu den bisher ausschließlich von uns betrachteten Scheiben mit endlicher Berandung; die Definition der Eigenfunktionen ist jedoch leicht auf diesen Fall zu übertragen; außerdem ist ihre Bestimmung in diesem Fall am einfachsten und liefert bereits wertvolle Hinweise auf das Verhalten anderer Bereichsformen. Bei der isotropen Kreisscheibe werden wir ein reines Punktspektrum finden mit einem vollständigen System von Eigenfunktionen und genau drei Eigenwerten, von denen einer einfach ist und die beiden anderen Häufungspunkte sind.

Besitzt der Operator  $\mathfrak{B}^S \triangleq \Pi - U^\circ$  ein vollständiges System von normierten Eigenelementen  $g$  mit den Darstellungsfunktionen  $R$  und  $w$ , so kann man diese als die Basisvektoren eines *Cartesischen* Koordinatensystems im Zustandsraum  $S$  auffassen, welches dadurch ausgezeichnet ist, daß das Iterationsverfahren (4.2.28–31) auf seinen Achsen in geometrischer Progression fortschreitet, wobei allerdings das Verhältnis  $\mu_i$  auf seinen Achsen im allgemeinen verschieden ist. In diesem Fall gelten für einen beliebigen Zustand  $g$  und seine Repräsentationen  $R$  und  $w$  die Entwicklungen

$$R = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \begin{matrix} \langle i \rangle \\ r_i R \end{matrix}, \quad Q = (\Pi - U^\circ) R = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mu_i \begin{matrix} \langle i \rangle \\ r_i R \end{matrix}, \quad P = (\Pi + U^\circ) R = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varkappa_i \begin{matrix} \langle i \rangle \\ r_i R \end{matrix} \quad (4.3.9)$$

$$w = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} r_i w, \quad v = w (\Pi - U^\circ) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mu_i r_i w, \quad u = w (\Pi + U^\circ) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \kappa_i r_i w \quad (4.3.10)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$r_i = \left\{ \begin{matrix} \langle i \rangle \\ w, R \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \langle i \rangle \\ w, R \end{matrix} \right\} \quad (4.3.11)$$

und dem Normquadrat, also der doppelten elastischen Energie in  $K^\circ$

$$\{w, R\} = \{R, U^\circ R\} = \{w, \Pi^\circ w\} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} r_i^2 \quad (4.3.12)$$

Kennt man die Eigenfunktionen, so kann man die erste Randwertaufgabe durch Reihenentwicklung lösen, indem man die vorgegebene Verschiebung  $[w]$  auf  $(S)$  für  $w$  in (4.3.11) einsetzt. Zur Lösung der zweiten Randwertaufgabe mit vorgegebener Kräftebelegung  $[P]$  entwickelt man (4.2.40) beiderseits nach (4.3.9)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \kappa_i [r_i] R = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{matrix} \langle i \rangle \\ w, [P] \end{matrix} \right\} R \quad (4.3.13)$$

mit den unbekannten Koeffizienten  $[r_i]$  der Entwicklung

$$[R] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} [r_i] R \quad (4.3.14)$$

Sie wird gelöst durch

$$[r_i] = \frac{1}{\kappa_i} \left\{ \begin{matrix} \langle i \rangle \\ w, [P] \end{matrix} \right\} \quad (4.3.15)$$

Das gesuchte Spannungsfeld wird nun aus den bekannten Spannungsfeldern der Kräftebelegungen  $R$  zusammengesetzt.

Da sich nach (4.3.2) die Kräftebelegung  $R$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  nur um den konstanten Faktor  $\kappa_i$  bzw.  $\mu_i$  von ihren Anteilen  $P$  bzw.  $Q$  unterscheidet, die von  $(K^+)$  bzw.  $(K^-)$  aufgenommen werden, gelten zu (4.3.7) analoge Orthogonalitätsbeziehungen auch in  $K^+$  und  $K^-$ . Mit anderen Worten: die Wechselwirkungsenergie der von den Eigenfunktionen  $R$  und  $R$  mit  $i \neq j$  hervorgerufenen Spannungsfelder verschwindet nicht nur im Grundkörper  $K^\circ$  als Ganzes, sondern auch in den Teilbereichen  $(K^+)$  und  $(K^-)$  für sich. Die Entwicklung (4.3.14) approximiert also die gesuchte Lösung optimal nicht nur in Bezug auf die Norm  $\sqrt{\{w, \Pi^\circ w\}}$ , sondern auch in Bezug auf die Norm  $\sqrt{\{w, \Pi^+ w\}}$ , d. h. bezüglich der elastischen Energie in  $K^+$ . Dies ist aber die optimale Annäherung im Sinne der Bergmanschen Reihenentwicklung; das Lösungsverfahren (4.3.13–15) stellt also einen Sonderfall der Bergmanschen Methode [36–39] dar, bei dem sich die verwendeten Orthogonalfunktionen dadurch auszeichnen, daß sie gleichzeitig Eigenfunktionen des Operators  $\Pi - U^\circ$  sind.

Für die praktische Lösung von Randwertproblemen kommen sie indessen aus dem Grunde kaum in Frage, da sie meist — von wenigen einfachen Ausnahmen abgesehen — nur mit sehr großem Aufwand in brauchbarer Näherung numerisch zu gewinnen wären. Für die *Bergmansche* Entwicklung genügt aber ein beliebiges, bezüglich der elastischen Energie in  $K^+$  als Normquadrat orthogonales Funktionensystem; die Verwendung von Eigenfunktionen eines Operators bringt keine besonderen Vorteile, ganz abgesehen von der Frage, ob der Operator überhaupt ein vollständiges System von Eigenfunktionen besitzt. Die folgende Untersuchung des Spektrums von  $\Pi - U^\circ$  dient denn auch nicht so sehr der Bestimmung von Eigenfunktionen für die praktische Rechnung als vielmehr der Gewinnung von Anhaltspunkten für die Wirksamkeit der Konvergenzverbesserungsverfahren von § 5.

Die Bestimmung der Eigenfunktionen der beschriebenen Art gestaltet sich für die Halbebene und die Kreisscheibe deshalb besonders einfach, weil für beide Bereichsformen vollständige Funktionensysteme bekannt sind, welche die Differentialgleichungen für die Verschiebungen lösen (vgl. den analogen Fall der Kreisringplatte bei *Hoppe* [61]). Man hat also nichts weiter zu tun, als diese Lösungen zu orthogonalen Linearkombinationen zusammenzufassen, was um so einfacher ist, als diese Funktionensysteme die trigonometrischen Funktionen enthalten, die bei verschiedener Periodenlänge sowieso orthogonal sind. Für jede Periodenlänge ergeben sich vier linear unabhängige, zweikomponentige Vektorfunktionen, die man in dem durch (4.3.7) erklärten Sinne zu orthogonalisieren hat. Wir übergehen die etwas langwierige, im übrigen aber elementare Rechnung und begnügen uns mit der Angabe der Differentialgleichung und der Ergebnisse. Sie gestatten die Lösung von Randwertproblemen mit vorgegebenen Belastungen oder Verschiebungen auf den Rändern der Halbebene und der Kreisscheibe ohne weitere Zuhilfenahme der Differentialgleichung durch eine Reihenentwicklung, welche die gesuchte Lösung optimal im Energiemittel approximiert.

#### 4.3.A. Die Eigenfunktionen der Halbebene.

Bezeichnen wir mit  $u$  und  $v$  die Verschiebungskomponenten in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung und mit  $\mathcal{M}$  die Querkontraktionszahl, so erhält man für die Verschiebungen des ebenen Spannungszustandes das Gleichungssystem \*)

$$\begin{aligned} 2\mathcal{M} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mathcal{M} - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\mathcal{M} + 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0 \\ 2\mathcal{M} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\mathcal{M} - 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\mathcal{M} + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

Wir suchen nun Lösungen in der Vollebene, welche unter der Einwirkung einer Belastung auf der  $x$ -Achse das Eigenwertproblem (4.3.1–3) lösen. Anschaulich ausgedrückt bedeutet dies, daß wir vektorielle Belastungsfunktionen  $^{(i)}\mathfrak{R}(x)$  auf der  $x$ -Achse suchen, welche so beschaffen sind, daß die bei einem Schnitt dicht unterhalb bzw. dicht oberhalb der  $x$ -Achse zur Aufrechterhaltung des Verzerrungszustandes notwendigen Kräftebelegungen  $^{(i)}\mathfrak{P}(x)$  bzw.  $^{(i)}\mathfrak{Q}(x)$

\*) Vgl. auch [134].

in jedem Punkt mit  ${}^{(i)}\mathfrak{R}(x)$  richtungsgleich sind und sich von  ${}^{(i)}\mathfrak{R}(x)$  nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Wir schreiben nur die Eigenfunktionen für eine Periodenlänge an; die angeschriebenen Indizes beziehen sich nur auf die zu einer Periodenlänge gehörige Vierergruppe. Zu jeder Eigenfunktion schreiben wir neben den Eigenwerten  $\mu_i$  bzw.  $\kappa_i$  von  $\Pi^- U^\circ$  und  $\Pi^+ U^\circ$  den Quotienten  $\frac{1 - \mu_i}{\mu_i}$  an, ferner die Kräftebelegungs- und die Verschiebungsform sowie das Verschiebungsfeld in der unteren Halbebene ( $K^+$ ) und der oberen Halbebene ( $K^-$ ). Die einzelnen Vektorfunktionen schreiben wir als Spaltenmatrizen, und zwar oben die  $x$ -Komponente und unten die  $y$ -Komponente; auf die Normierung der Eigenfunktionen verzichten wir hier und beziehen alle Funktionen auf den Betrag  $\hat{w}$  der Verschiebung auf der  $x$ -Achse, der sich für sämtliche Eigenfunktionen in diesem Fall als eine Konstante ergibt, ebenso wie die Beträge der Kräftebelegungen. Man bestätigt leicht die Orthogonalitätsrelationen (4.3.7); daß die Kräftebelegungen und Verschiebungen in diesem Fall auch untereinander im gewöhnlichen Sinne orthogonal sind, ist dagegen Zufall und wird sicher nicht für beliebige Bereichsformen zutreffen.

Die zu einer Periodenlänge  $2\pi/\gamma$  gehörigen Eigenfunktionen erhalten wir damit in folgender Form:

## 1. Eigenfunktion:

a) Eigenwert:

$$\mu_1 = \frac{\mathcal{M} + 1}{4\mathcal{M}} \quad , \quad \frac{1 - \mu_1}{\mu_1} = \frac{3\mathcal{M} - 1}{\mathcal{M} + 1} \quad , \quad \kappa_1 = \frac{3\mathcal{M} - 1}{4\mathcal{M}} \quad (4.3.17)$$

b) Verschiebung und Belastung auf der  $x$ -Achse:

$${}^{(1)}\mathfrak{w} = {}^{(1)}\hat{w} \begin{pmatrix} \cos \gamma x \\ \sin \gamma x \end{pmatrix}, \quad {}^{(1)}\mathfrak{R} = 2Gh \quad {}^{(1)}\hat{w}\gamma \frac{4\mathcal{M}}{3\mathcal{M} - 1} \begin{pmatrix} \cos \gamma x \\ \sin \gamma x \end{pmatrix} \quad (4.3.18)$$

c) Verschiebung in der unteren Halbebene ( $K^+$ ):

$${}^{(1)}\mathfrak{w}^+ = {}^{(1)}\hat{w} \begin{pmatrix} \cos \gamma x \\ \sin \gamma x \end{pmatrix} e^{\gamma y} \quad (4.3.19)$$

d) Verschiebung in der oberen Halbebene ( $K^-$ ):

$${}^{(1)}\mathfrak{w}^- = {}^{(1)}\hat{w} \begin{pmatrix} \cos \gamma x \left( 1 - 2 \frac{\mathcal{M} + 1}{3\mathcal{M} - 1} \gamma y \right) \\ \sin \gamma x \left( 1 + 2 \frac{\mathcal{M} + 1}{3\mathcal{M} - 1} \gamma y \right) \end{pmatrix} e^{-\gamma y} \quad (4.3.20)$$

$G$  ist der Schubmodul,  $h$  die Scheibendicke.

## 2. Eigenfunktion:

Diese besitzt denselben Eigenwert wie die erste und ergibt sich aus ihr durch die Substitution

$$\begin{aligned} & {}^{(1)}\hat{w} \parallel {}^{(2)}\hat{w} \\ & \cos \gamma x \parallel \sin \gamma x \\ & \sin \gamma x \parallel -\cos \gamma x \end{aligned} \quad (4.3.21)$$



### 3. Eigenfunktion:

a) Eigenwert:

$$\mu_3 = \frac{3\mathcal{M} - 1}{4\mathcal{M}} \quad , \quad \frac{1 - \mu_3}{\mu_3} = \frac{\mathcal{M} + 1}{3\mathcal{M} - 1} \quad , \quad \kappa_3 = \frac{\mathcal{M} + 1}{4\mathcal{M}} \quad (4.3.22)$$

b) Verschiebung und Belastung auf der  $x$ -Achse:

$${}^{(3)}w = {}^{(3)}\hat{w} \begin{pmatrix} \cos \gamma x \\ -\sin \gamma x \end{pmatrix} \quad , \quad {}^{(3)}\mathfrak{R} = 2Gh {}^{(3)}\hat{w} \gamma \frac{4\mathcal{M}}{3\mathcal{M} - 1} \begin{pmatrix} \cos \gamma x \\ -\sin \gamma x \end{pmatrix} \quad (4.3.23)$$

c) Verschiebung in der unteren Halbebene ( $K^+$ ):

$${}^{(3)}w^+ = {}^{(3)}\hat{w} \begin{pmatrix} \cos \gamma x \left( 1 + 2 \frac{\mathcal{M} + 1}{3\mathcal{M} - 1} \gamma y \right) \\ -\sin \gamma x \left( 1 - 2 \frac{\mathcal{M} + 1}{3\mathcal{M} - 1} \gamma y \right) \end{pmatrix} e^{\gamma y} \quad (4.3.24)$$

d) Verschiebung in der oberen Halbebene ( $K^-$ ):

$${}^{(3)}w^- = {}^{(3)}\hat{w} \begin{pmatrix} \cos \gamma x \\ -\sin \gamma x \end{pmatrix} e^{-\gamma y} \quad (4.3.25)$$

### 4. Eigenfunktion:

Diese besitzt denselben Eigenwert wie die dritte und ergibt sich aus ihr durch die Substitution

$$\begin{aligned} & {}^{(3)}\hat{w} \parallel {}^{(4)}\hat{w} \\ & \cos \gamma x \parallel \sin \gamma x \\ & \sin \gamma x \parallel -\cos \gamma x \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Die Lösung einer Randwertaufgabe durch Reihenentwicklung geht nun so vor sich, daß man zunächst die Eigenfunktionen nach (4.3.5, 6) normiert; hierbei wird nach (4.3.7) weder  $U^\circ$  noch  $\Pi^\circ$  explizit benötigt. Mit den normierten Eigenfunktionen rechnet man dann nach (4.3.9–11) weiter; auf diese Weise erhält man die Reihenentwicklung der Belastungsfunktion  $[R] \triangleq [\mathfrak{R}(x)]$ , welche in der vollen Ebene auf der  $x$ -Achse angebracht dieselbe Verzerrung und dasselbe Spannungsfeld hervorruft wie die vorgegebene Verschiebung auf der  $x$ -Achse oder wie die gegebene, auf der  $x$ -Achse an der unteren Halbebene angebrachte Belastung im Gebiet unterhalb der  $x$ -Achse. Da die zugehörigen Verschiebungsfelder für die einzelnen Reihenglieder bekannt sind, kann man danach in einfacher Weise die Reihenentwicklungen für jede gewünschte Größe des gesuchten Spannungsfeldes gewinnen. Bei periodischen Belastungen oder Verschiebungen normiert man über die Periodenlänge  $L$ ; danach ergibt sich

$$\hat{w} = \sqrt{\frac{3\mathcal{M} - 1}{8Gh\mathcal{M}\gamma L}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\mathcal{M} - 1}{\pi Gh\mathcal{M}n}} \quad (4.3.27)$$

wo  $n$  die Zahl der Perioden des Reihengliedes im Periodenintervall der Länge  $L$  ist. Im übrigen kann man auch die Komponenten der gegebenen Funktionen

einzeln in eine *Fourier*-Reihe entwickeln und daraus die Reihenentwicklung nach den Funktionen (4.3.17–26) durch Koeffizientenvergleich bestimmen; dann kommt man ohne Normierung aus. Schließlich kann man auch entsprechend der Bemerkung im Anschluß an (4.3.15) die Normierung auf die untere Halbebene  $K^+$  beziehen, indem man den Faktor  $\frac{1}{\kappa_i} = 1/(1 - \mu_i)$  in die

Normierung (4.3.27) mit hereinnimmt. Dann liefert die Reihenentwicklung der gegebenen Belastung bzw. Verschiebung unmittelbar die Belastungsfunktion  $[R] \triangleq [\mathfrak{R}(x)]$ . Bei der Behandlung nicht-periodischer Belastungen und Verschiebungen mit Hilfe des *Fourier*-Integrals wählt man  $L$  gleich der Einheit. Die Vollständigkeit des Orthogonalsystems (4.3.17–26) ergibt sich aus der bekannten Vollständigkeit des Systems der trigonometrischen Funktionen und der leicht nachprüfbaren Eigenschaft, daß sich die vier *Fourier*-Komponenten einer vektoriellen Belastungs- oder Verschiebungsfunktion auf der  $x$ -Achse für jede Periodenzahl aus der zur selben Periodenzahl gehörigen Vierergruppe der Eigenfunktionen (4.3.17–26) linear kombinieren lassen. Wichtig ist ferner noch die Bemerkung, daß nach (4.3.19–20, 24–25) die Verschiebungs- und damit die Spannungsfelder mit wachsender Periodenzahl immer stärker nach außen exponentiell abklingen und daß das Eigenwertproblem (4.3.1–3) für die Halbebene nur zwei symmetrisch zu 0,5 gelegene Eigenwerte hat, auf die sich die Eigenfunktionen bei Abzählung nach wachsender Periodenzahl gleichmäßig verteilen. Es ist danach zu erwarten, daß an einem beliebigen glatten Rand die Eigenfunktionen mit wachsender Periodenzahl eine ähnliche Gestalt annehmen und daß sich ihr Spannungsfeld nach beiden Seiten immer mehr auf die nächste Umgebung der Randkurve konzentriert. Da somit die weiter entfernten Teile der Kurve mit merklich veränderter Richtung immer weniger aufeinander einwirken, wird auch das Verhältnis der elastischen Energien auf beiden Seiten dem entsprechenden Verhältnis bei der Halbebene vermutlich immer näher kommen. Das bedeutet, daß die Werte (4.3.17, 22) für Bereiche mit beliebigen, stückweise glatten Randkurven zumindest als Häufungsstellen der Eigenwerte auftreten werden. Wir werden diese Vermutung für die Eigenfunktionen der Kreisscheibe sofort bestätigen können.

#### 4.3.B. Die Eigenfunktionen der Kreisscheibe.

Vorgelegt sei eine Kreisscheibe vom Halbmesser  $a$  mit dem Ursprung als Mittelpunkt; wir führen Polarkoordinaten  $\varrho, \varphi$  ein, wo  $\varrho$  den durch  $a$  dividierten Radiusvektor und  $\varphi$  den entgegen dem Uhrzeigersinn genommenen Winkel mit der  $x$ -Achse bedeutet. Bezeichnen wir ferner mit  $u$  und  $v$  die durch  $a$  dividierten Radial- und Tangentialkomponenten der Verschiebung, so erhalten wir das Gleichungssystem für die Verschiebungen des ebenen Spannungszustandes

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{M} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{u}{\varrho^2} \right) + (\mathcal{M} - 1) \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + (\mathcal{M} + 1) \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho \partial \varphi} - (3\mathcal{M} - 1) \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= 0 \\
 2\mathcal{M} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + (\mathcal{M} - 1) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho^2} \right) + (\mathcal{M} + 1) \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho \partial \varphi} + (3\mathcal{M} - 1) \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.3.28}$$

Die Verschiebungsgleichungen für den ebenen Verzerrungszustand gehen daraus hervor durch die Substitution

$$\mathcal{M} \parallel \mathcal{M} - 1 \quad (4.3.29)$$

und die analogen Gleichungen für die *Schaefer*schen Spannungsfunktionen der Platte (§ 1.3) erhält man aus (4.3.28) durch die Substitution

$$\mathcal{M} \parallel -\mathcal{M} \quad (4.3.30)$$

Wir suchen vektorielle Belastungsfunktionen  $^{(i)}\mathfrak{R}(\varphi)$  auf dem Kreisumfang, welche so beschaffen sind, daß die bei einem Schnitt dicht innerhalb bzw. dicht außerhalb des Kreisumfangs zur Aufrechterhaltung des Verzerrungszustandes notwendigen Kräftebelegungen  $^{(i)}\mathfrak{P}(\varphi)$  bzw.  $^{(i)}\mathfrak{Q}(\varphi)$  mit  $^{(i)}\mathfrak{R}(\varphi)$  richtungsgleich sind und sich von  $^{(i)}\mathfrak{R}(\varphi)$  nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden.

Für das zu (4.3.28) mit (4.3.30) analoge Gleichungssystem hat *Hoppe* [61] ein vollständiges System periodischer Lösungen an Kreisscheibe und Kreisring angegeben; wir haben daraus für jede einzelne Periodenzahl Linearkombinationen zu bilden, welche die genannten Bedingungen und damit die Operatorgleichung (4.3.2) erfüllen. Wir übergehen die einfache Rechnung und geben sofort die Ergebnisse an.  $\gamma$  bedeutet jetzt die Periodenzahl auf dem Kreisumfang und ist damit im Gegensatz zu (4.3.17–26) eine dimensionslose Zahl; ebenso sind jetzt  $u$  und  $v$  dimensionslos. Zu den Kräftebelegungen bemerken wir, daß sie zwar als Funktionen des Winkels  $\varphi$  angegeben werden, aber auf die Längeneinheit des Kreisumfangs bezogen sind. Im übrigen ist die Bezeichnungsweise dieselbe wie bei der Halbebene; auch der durch  $a$  dividierte Betrag  $\hat{w}$  der Verschiebung auf dem Kreisumfang ( $S$ ) ist wieder konstant.  $(K^+)$  ist das Innengebiet und  $(K^-)$  das Außengebiet des Kreises, und zur Kennzeichnung der Eigenfunktionen verwenden wir sinngemäß Doppelindizes, deren erster die Nummer in der jeweiligen Vierergruppe und deren zweiter die Periodenzahl ist.

Damit erhalten wir die folgenden Eigenfunktionen:

### 1. Gruppe:

a) Eigenwert:

$$\mu_1 = \frac{3\mathcal{M} - 1}{4\mathcal{M}} \quad , \quad \frac{1 - \mu_1}{\mu_1} = \frac{\mathcal{M} + 1}{3\mathcal{M} - 1} \quad , \quad \kappa_1 = \frac{\mathcal{M} + 1}{4\mathcal{M}} \quad (4.3.31)$$

b) Verschiebung und Belastung auf dem Kreisumfang:

$$^{(1, \gamma)}\mathfrak{w} = ^{(1, \gamma)}\hat{w} \begin{pmatrix} \cos \gamma \varphi \\ \sin \gamma \varphi \end{pmatrix} \quad , \quad ^{(1, \gamma)}\mathfrak{R} = 2 G h ^{(1, \gamma)}\hat{w} (\gamma + 1) \frac{4\mathcal{M}}{3\mathcal{M} - 1} \begin{pmatrix} \cos \gamma \varphi \\ \sin \gamma \varphi \end{pmatrix} \quad (4.3.32)$$

c) Verschiebung im Innengebiet  $(K^+)$ :

$$^{(1, \gamma)}\mathfrak{w}^+ = ^{(1, \gamma)}\hat{w} \frac{1}{3\mathcal{M} - 1} \times \begin{pmatrix} \cos \gamma \varphi \{ -e^{1+\gamma} [(\mathcal{M} + 1)\gamma - 2(\mathcal{M} - 1)] + e^{-1+\gamma} (\mathcal{M} + 1)(\gamma + 1) \} \\ \sin \gamma \varphi \{ e^{1+\gamma} [(\mathcal{M} + 1)\gamma + 4\mathcal{M}] - e^{-1+\gamma} (\mathcal{M} + 1)(\gamma + 1) \} \end{pmatrix} \quad (4.3.33)$$

d) Verschiebung im Außengebiet ( $K^-$ ):

$${}^{(1, \gamma)}\mathbf{w}^- = {}^{(1, \gamma)}\hat{\mathbf{w}} \begin{pmatrix} \cos \gamma \varphi \\ \sin \gamma \varphi \end{pmatrix} \varrho^{-1-\gamma} \quad (4.3.34)$$

Die Periodenzahl  $\gamma = 0$  ist wegen einer Singularität im Mittelpunkt auszuschließen; wir werden diesen Fall konstanter Normalbelastung weiter unten behandeln. Nach (4.3.34) klingen die Spannungsfelder im Außengebiet nach einer einheitlichen Potenz von  $\varrho$  ab; sie entsprechen also dort einer höheren Punktsingularität. Als niedrigste dieser Singularitäten erkennt man für  $\varrho = 1$  ein „Doppelmoment“ im Ursprung.

## 2. Gruppe:

Diese besitzt denselben Eigenwert wie die erste und ergibt sich aus ihr durch die Substitution

$$\begin{aligned} & {}^{(1, \gamma)}\hat{\mathbf{w}} \parallel {}^{(2, \gamma)}\hat{\mathbf{w}} \\ & \cos \gamma \varphi \parallel - \sin \gamma \varphi \\ & \sin \gamma \varphi \parallel \cos \gamma \varphi \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

## 3. Gruppe:

a) Eigenwert:

$$\mu_3 = \frac{\mathcal{M} + 1}{4 \mathcal{M}} \quad , \quad \frac{1 - \mu_3}{\mu_3} = \frac{3 \mathcal{M} - 1}{\mathcal{M} + 1} \quad , \quad \kappa_3 = \frac{3 \mathcal{M} - 1}{4 \mathcal{M}} \quad (4.3.36)$$

b) Verschiebung und Belastung auf dem Kreisumfang:

$${}^{(3, \gamma)}\mathbf{w} = {}^{(3, \gamma)}\hat{\mathbf{w}} \begin{pmatrix} \cos \gamma \varphi \\ - \sin \gamma \varphi \end{pmatrix}, \quad {}^{(3, \gamma)}\mathfrak{R} = 2 G h \, {}^{(3, \gamma)}\hat{\mathbf{w}} (\gamma - 1) \frac{4 \mathcal{M}}{3 \mathcal{M} - 1} \begin{pmatrix} \cos \gamma \varphi \\ - \sin \gamma \varphi \end{pmatrix} \quad (4.3.37)$$

c) Verschiebung im Innengebiet ( $K^+$ ):

$${}^{(3, \gamma)}\mathbf{w}^+ = {}^{(3, \gamma)}\hat{\mathbf{w}} \begin{pmatrix} \cos \gamma \varphi \\ - \sin \gamma \varphi \end{pmatrix} \varrho^{-1+\gamma} \quad (4.3.38)$$

d) Verschiebung im Außengebiet ( $K^-$ ):

$$\begin{aligned} & {}^{(3, \gamma)}\mathbf{w}^- = {}^{(3, \gamma)}\hat{\mathbf{w}} \frac{1}{3 \mathcal{M} - 1} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \cos \gamma \varphi \{ \varrho^{1-\gamma} [(\mathcal{M} + 1) \gamma + 2 (\mathcal{M} - 1)] - \varrho^{-1-\gamma} (\mathcal{M} + 1) (\gamma - 1) \} \\ \sin \gamma \varphi \{ \varrho^{1-\gamma} [(\mathcal{M} + 1) \gamma - 4 \mathcal{M}] - \varrho^{-1-\gamma} (\mathcal{M} + 1) (\gamma - 1) \} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

Wiederum muß der Wert  $\gamma = 0$  ausgeschlossen werden. Für  $\gamma = 1$  erhalten wir dagegen eine triviale Lösung mit verschwindenden Kräftebelegungen; die nicht-trivialen Lösungen für  $\gamma = 1$  würden dagegen Spannungsfeldern mit resultierenden Kräften auf dem Kreisumfang entsprechen, gehören also zu den verbotenen Anteilen von § 4.2. Wir verzichten daher auf ihre Berechnung.

Die zu den Verschiebungsfeldern für  $\gamma = 1$  analogen *Schaefer'schen* Spannungsfunktionenfelder der Platte finden sich bei *Hoppe* [61], wo sie im Hinblick auf die Besonderheiten der Ringgebiete benötigt werden. Die Spannungsfelder im Außengebiet entsprechen nach (4.3.39) jetzt nicht mehr einer einfachen Punktsingularität, sondern sind aus zwei Singularitätsfeldern zusammengesetzt. Immerhin läßt sich nun das Spannungsfeld jeder ebenen Punktsingularität — mit Ausnahme des weiter unten behandelten Dilatationszentrums und der Stufenversetzung — nach (4.3.34, 39) im Außengebiet aus vier Eigenfunktionen der Kreisscheibe linear zusammensetzen. Dadurch ist die an sich nicht orthogonale Entwicklung eines Spannungsfeldes nach elastischen Multipolen ([27], S. 89) auf eine bezüglich eines Kreises energetisch orthogonale Entwicklung zurückgeführt. Dies kann für die Berechnung der nach *Eshelby* zu definierenden „Kraft“ auf eine Singularität wichtig sein [19, 27, 28, 97, 101].

#### 4. Gruppe:

Diese besitzt denselben Eigenwert wie die dritte und ergibt sich aus ihr durch die Substitution

$$\begin{aligned} & (3, \gamma) \hat{w} \parallel (4, \gamma) \hat{w} \\ & \cos \gamma \varphi \parallel -\sin \gamma \varphi \\ & \sin \gamma \varphi \parallel \cos \gamma \varphi \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

Für eine konstante Normalbelastung der Kreisscheibe haben wir schließlich noch eine „nullte“ Eigenfunktion hinzuzufügen, deren Spannungsfeld im Innern homogen ist und im Außengebiet dem ebenen Dilatationszentrum entspricht. Wir erhalten für die

#### 0. Eigenfunktion:

a) Eigenwert:

$$\mu_0 = \frac{\mathcal{M} - 1}{2\mathcal{M}} \quad , \quad \frac{1 - \mu_0}{\mu_0} = \frac{\mathcal{M} + 1}{\mathcal{M} - 1} \quad , \quad \kappa_0 = \frac{\mathcal{M} + 1}{2\mathcal{M}} \quad (4.3.41)$$

b) Verschiebung und Belastung auf dem Kreisumfang:

$${}^{(0)}w = {}^{(0)}w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^{(0)}\mathfrak{R} = 2 G h {}^{(0)}\hat{w} \frac{2\mathcal{M}}{\mathcal{M} - 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.42)$$

c) Verschiebung im Innengebiet ( $K^+$ ):

$${}^{(0)}w^+ = {}^{(0)}\hat{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \varrho \quad (4.3.43)$$

d) Verschiebung im Außengebiet ( $K^-$ ):

$${}^{(0)}w^- = {}^{(0)}\hat{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \varrho^{-1} \quad (4.3.44)$$

Auf die entsprechende Eigenfunktion für konstante Tangentialbelastung verzichten wir; sie würde ein resultierendes Moment ergeben, gehört also zu den

verbotenen Anteilen. Wiederum findet sich der dazu nach *Schaefer* analoge Fall bei *Hoppe* [61].

Damit ist das Orthogonalsystem für die Kreisscheibe vollständig, mit der einzigen Ausnahme der verbotenen Anteile. Über die Lösung von Randwertproblemen an der Kreisscheibe durch Reihenentwicklung gilt wieder das im Anschluß an (4.3.26) Gesagte; wir bemerken nur noch, daß bei dieser Reihenentwicklung Nicht-Gleichgewichtsanteile in den Belastungen und starre Bewegungen in den Verschiebungen von selbst herausfallen. Die Normierung fällt hier für die einzelnen Gruppen von Eigenfunktionen verschieden aus; betrachten wir nicht die Bogenlänge auf dem Kreisumfang, sondern den Winkel  $\varphi$  als Integrationsveränderliche, so finden wir die Normierungsfaktoren

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\hat{w} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{M} - 1}{2\pi G h \mathcal{M}}} \\ {}^{(1, \gamma)}\hat{w} = {}^{(2, \gamma)}\hat{w} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\mathcal{M} - 1}{\pi G h \mathcal{M}(\gamma + 1)}} \\ {}^{(3, \gamma)}\hat{w} = {}^{(4, \gamma)}\hat{w} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\mathcal{M} - 1}{\pi G h \mathcal{M}(\gamma - 1)}} \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

Daß diese Eigenfunktionen tatsächlich die Operatorgleichung (4.3.2) erfüllen, wurde von *Seggelke* [133] mit Hilfe der Kernfunktion (4.4.75) bestätigt. Mit Hilfe einer Reihenentwicklung nach den Funktionen (4.3.31–45) wurde auch die in Abb. 4.4.4 zum Vergleich eingezeichnete exakte Lösung für das von *Seggelke* [133] numerisch gerechnete Beispiel der Kreisscheibe mit zwei Einzelkräften bestimmt, auf das wir in § 4.4 ausführlich zurückkommen werden.

Punkt Nr.	Rest nach dem 11. Schritt	Verhältnis des 11. zum 10. Rest	Rest nach dem 11. Schritt	Verhältnis des 11. zum 10. Rest
a) Normalkomponente			b) Tangentialkomponente:	
1	−0.001479	0,595	0	—
2	−0.000674	0,662	−0.000822	0,600
3	−0.000124	0,805	−0.000657	0,638
4	−0.000050	0,321	−0.000472	0,650
5	0.000118	0,615	−0.000352	0,654
6	0.000151	0,635	−0.000270	0,657
7	0.000169	0,640	−0.000209	0,657
8	0.000180	0,645	−0.000161	0,657
9	0.000187	0,650	−0.000122	0,660
10	0.000191	0,650	−0.000088	0,66 <sub>2</sub>
11	0.000194	0,655	−0.000057	0,66 <sub>2</sub>
12	0.000195	0,652	−0.000028	0,66 <sub>7</sub>
13	0.000196	0,653	−0.000000	—

Theoretischer Grenzwert: 0,665

Tab. 4.3.1: Reste und Restverhältnisse bei der numerischen Iteration eines Beispiels [133]. Bezeichnungen und Zahlenwerte vgl. Abb. 4.4.4, S. 258.

In Tab. 4.3.1 sind die Reste eingetragen, die sich bei den numerischen Rechnungen von *Seggelke* nach dem 11. Iterationsschritt ergaben, sowie ihr Verhältnis zum 10. Rest. Bekanntlich strebt dieses Verhältnis bei jedem einfachen Iterationsverfahren zum größten Eigenwert [68, 69]; nach (4.3.31) ergibt sich demnach mit den Zahlenwerten von Abb. 4.4.4 der theoretische Grenzwert 0,665; und dieser wird nach Tab. 4.3.1 in den von den Lastangriffsstellen genügend weit entfernten Punkten schon recht gut angenähert. Daß die Annäherung in der Nähe der Lastangriffsstellen merklich schlechter ausfällt, liegt nur zu einem relativ kleinen Teil an den Iterationsfehlern; der Hauptgrund ist vielmehr, daß die beim Übergang zum finiten Gleichungssystem gemachten Fehler sich hauptsächlich in den Eigenfunktionen hoher Periodenzahl auswirken, die an den Unstetigkeitsstellen der Belastung besonders stark hervortreten (vgl. §4.4 D).

Die Vermutung, daß sich die Verschiebungsfelder in der Nähe der Randkurve ( $S$ ) mit steigender Periodenzahl immer mehr der Form der Verschiebungsfelder in der Umgebung der  $x$ -Achse bei den Eigenfunktionen der Halbebene annähern, prüfen wir am Beispiel der Eigenfunktionen (4.3.38–39) der 3. Gruppe. Für die Radialfunktionen von (4.3.38) ergibt sich mit der Substitution

$$\varrho = 1 + \eta \quad (4.3.46)$$

das asymptotische Verhalten für  $\eta \rightarrow 0$  und  $\gamma \rightarrow \infty$  bei beschränktem Produkt  $\gamma \eta$  aus einer bekannten Grenzwertdefinition der Exponentialfunktion

$$\varrho^{-1-\gamma} = (1 + \eta)^{-1-\gamma} = \left(1 + \frac{\gamma \eta}{\gamma}\right)^{-\gamma} \frac{1}{1 + \eta} \sim e^{-\gamma \eta} \quad (4.3.47)$$

also das der Gleichung (4.3.25) entsprechende Exponentialverhalten. Für die Radialfunktionen von (4.3.39) erhalten wir bei der Radialkomponente

$$\begin{aligned} & \varrho^{1-\gamma} [(\mathcal{M} + 1) \gamma + 2 (\mathcal{M} - 1)] - \varrho^{-1-\gamma} (\mathcal{M} + 1) (\gamma - 1) \\ &= \left(1 + \frac{\gamma \eta}{\gamma}\right)^{-\gamma} \left\{ (1 + \eta) [(\mathcal{M} + 1) \gamma + 2 (\mathcal{M} - 1)] - \frac{1}{1 + \eta} (\mathcal{M} + 1) (\gamma - 1) \right\} \\ &\sim e^{-\gamma \eta} \{ (3 \mathcal{M} - 1) + 2 (\mathcal{M} + 1) \gamma \eta \} \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

und bei der Tangentialkomponente

$$\begin{aligned} & \varrho^{1-\gamma} [(\mathcal{M} + 1) \gamma - 4 \mathcal{M}] - \varrho^{-1-\gamma} (\mathcal{M} + 1) (\gamma - 1) \\ &= \left(1 + \frac{\gamma \eta}{\gamma}\right)^{-\gamma} \left\{ (1 + \eta) [(\mathcal{M} + 1) \gamma - 4 \mathcal{M}] - \frac{1}{1 + \eta} (\mathcal{M} + 1) (\gamma - 1) \right\} \\ &\sim e^{-\gamma \eta} \{ - (3 \mathcal{M} - 1) + 2 (\mathcal{M} + 1) \} \end{aligned} \quad (4.3.49)$$

entsprechend dem Exponentialverhalten von (4.3.24). Die Vertauschung von ( $K^+$ ) und ( $K^-$ ) ist durch den Durchlaufungssinn der Randkurve bedingt. Diese Beziehungen gelten allerdings nur in der nächsten Nähe der Randkurve; nach außen gehen (4.3.38–39), wie dort bereits bemerkt, in Multipolfelder sehr

hoher Ordnung über, die aber mit sehr hohen Potenzen von  $\frac{1}{\varrho}$  abklingen und deshalb nicht wesentlich zur Energie beitragen.

Daß die Eigenwerte (4.3.17, 22) der Halbebene als Häufungsstellen der Eigenwerte der Kreisscheibe erscheinen würden, war von vornherein zu erwarten; eigentümlich ist jedoch, daß die Eigenwerte dieser beiden Bereiche bis auf einen genau übereinstimmen. Diese genaue Übereinstimmung ist bei anderen Bereichsformen natürlich nicht mehr zu erwarten; immerhin wird sich zeigen, daß die Eigenwerte (4.3.17, 22) die kleinste überhaupt mögliche Hyperkugel  $\mu$  (vgl. § 2.5) des Operators  $\Pi - U^\circ$  bestimmen.

#### 4.3.C. Regularisierung des Operators $\Pi - U^\circ$ für die Kreisscheibe.

Bekanntlich ist ein vollstetiger symmetrischer Operator ([62,] S. 21; [66, Ziff. 85] unter anderem daran zu erkennen, daß sein Spektrum nur den Häufungspunkt Null besitzt ([66,] Ziff. 93). Der Operator  $\Pi - U^\circ$  kann also wegen der beiden von Null verschiedenen Häufungspunkte seines Spektrums nicht vollstetig sein. Hat dagegen das Spektrum eines Operators  $\mathfrak{B}$  nur einen einzigen Häufungspunkt  $\beta$ , so läßt er sich nach Satz 5, § 2.5 in der Form

$$\mathfrak{B} = \beta \mathfrak{E} + \mathfrak{V} \quad (4.3.50)$$

darstellen, wo  $\mathfrak{V}$  ein vollstetiger Operator ist. Dies wäre jedoch auf den Operator  $\mathfrak{B}^S \triangleq \Pi - U^\circ$  nur im Falle  $\mathcal{M} = 1$  anwendbar; dann ist aber die Form (4.2.15) nicht mehr eigentlich positiv definit, und der Zustandsraum  $S$  ist kein Hilbert-Raum mehr. Auf diesen Fall kommen wir besonders in § 4.5 im Zusammenhang mit dem *Miche-Weinelschen* Iterationsverfahren zurück. Halten wir aber an der Forderung  $\mathcal{M} > 1$ , also der Forderung eigentlich positiv definiter elastischer Energiedichte des ebenen Spannungszustandes fest, so hat das Spektrum von  $\mathfrak{B}^S \triangleq \Pi - U^\circ$  und damit auch von  $\mathfrak{A}^S \triangleq \Pi^+ U^\circ$  zwei verschiedene, symmetrisch zu 0,5 gelegene Häufungspunkte. Die zu diesen Häufungspunkten gehörigen Eigenfunktionen von  $\Pi - U^\circ$  und  $\Pi^+ U^\circ$  gehen nach Satz 5, § 2.5 durch eine einfache Vertauschung auseinander hervor. Es gibt jedoch noch eine andere Möglichkeit, die Gleichung

$$\mathfrak{A}^S [g] = [g^*] \triangleq (\Pi^+ U^\circ) [R] = [P] \quad (4.3.51)$$

gegen die mit (4.2.40) das Iterationsverfahren (4.3.21) konvergiert, auf eine Gleichung mit einem vollstetigen Operator zurückzuführen oder, mit einem in der Theorie der singulären Integralgleichungen üblichen Ausdruck, die Gleichung zu „regularisieren“ [41, 42, 135–137].

Wir gehen dazu aus von dem Produkt zweier symmetrischer Operatoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B} = \mathfrak{E} - \mathfrak{A}$  mit reinem Punktspektrum, den Eigenwerten  $\kappa_i$  bzw.

$\mu_i = 1 - \kappa_i$  und den gemeinsamen normierten <sup><i></sup>Eigenelementen  $f$ . In der symbolischen Reihenentwicklung (2.4.21–24) erscheint dann das Operatorprodukt in der Form

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{B} \mathfrak{A} \triangleq \sum_i \kappa_i (1 - \kappa_i) \overset{< i >}{f} \{ \overset{< i >}{f} , \overset{< i >}{f} \} \overset{< i >}{f} = \sum_i \kappa_i (1 - \kappa_i) \overset{< i >}{f} \overset{< i >}{f} \quad (4.3.52)$$



Besitzt nun das Spektrum des Operators  $\mathfrak{A}$  genau zwei Häufungspunkte  $\alpha$  und  $1 - \alpha$ , so kann man schreiben

$$\mathfrak{C} = \gamma \mathfrak{C} + \mathfrak{B} \quad (4.3.53)$$

wo

$$\mathfrak{B} \triangleq \sum_i (z_i (1 - z_i) - \gamma) \begin{matrix} <i> \\ f \end{matrix} \begin{matrix} <i> \\ f \end{matrix} \quad (4.3.54)$$

ein vollstetiger Operator und

$$\gamma = \alpha (1 - \alpha) \quad (4.3.55)$$

ist.

Nun betrachten wir speziell die Operatoren  $\mathfrak{A}^S \triangleq \Pi^+ U^\circ$ ,  $\mathfrak{B}^S \triangleq \Pi^- U^\circ$  und

$$\mathfrak{C}^S = \mathfrak{B}^S \mathfrak{A}^S = \gamma \mathfrak{C} + \mathfrak{B}^S \triangleq (\Pi^- U^\circ) (\Pi^+ U^\circ) = \gamma E + W \quad (4.3.56)$$

für die Kreisscheibe. Hier ist nach (4.3.31, 36)

$$\gamma = \frac{(\mathcal{M} + 1)(3\mathcal{M} - 1)}{16\mathcal{M}^2} \quad (4.3.57)$$

und  $\mathfrak{B}^S \triangleq W$  nicht nur vollstetig, sondern sogar ausgeartet. Denn da mit der einzigen Ausnahme der nullten Eigenfunktion (4.3.41–44) alle Punkte des Spektrums mit den Häufungspunkten zusammenfallen, verschwinden auch in (4.3.54) alle Zahlenfaktoren unter dem Summenzeichen mit der einzigen Ausnahme der nullten Eigenfunktion. Die Gleichung (4.3.51) geht nun durch Anwendung von  $\mathfrak{B}^S$  über in

$$\mathfrak{C}^S [g] = \mathfrak{B}^S [g^*] \triangleq (\Pi^- U^\circ) (\Pi^+ U^\circ) [R] = (\Pi^- U^\circ) [P] \quad (4.3.58)$$

oder mit (4.3.56) in

$$(\gamma \mathfrak{C} - \mathfrak{B}^S) [g] = \mathfrak{B}^S [g^*] \triangleq (\gamma E + W) [R] = (\Pi^- U^\circ) [P] \quad (4.3.59)$$

Wir schreiben diese Gleichung nun in die Matrizenform (4.3.31–44) um, wobei wir wieder oben die Radialkomponente  $R_e(\varphi)$  und unten die Tangentialkomponente  $R_\varphi(\varphi)$  eintragen. Für die rechte Seite von (4.3.59), die wir als bekannt ansehen können, setzen wir

$$(\Pi^- U^\circ) [P] \triangleq \begin{pmatrix} A_e(\varphi) \\ A_\varphi(\varphi) \end{pmatrix} \quad (4.3.60)$$

Die Summe (4.3.54) reduziert sich auf das der nullten Eigenfunktion (4.3.41–44) entsprechende Glied; normieren wir die Eigenfunktion nach (4.3.45), so erhalten wir mit (4.3.57) nach einer elementaren Rechnung

$$W [R] \triangleq \frac{(\mathcal{M} + 1)(\mathcal{M} - 3)}{16\mathcal{M}^2} \begin{pmatrix} \overline{R_e(\varphi)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.61)$$

mit dem Mittelwert über den Umfang des Einheitskreises

$$\overline{R_e(\varphi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_e(\varphi) d\varphi \quad (4.3.62)$$

Einsetzen in (4.3.59) liefert schließlich die einfache Funktionalgleichung

$$\frac{(\mathcal{M} + 1)(3\mathcal{M} - 1)}{16\mathcal{M}^2} \begin{pmatrix} R_q(\varphi) \\ R_q(\varphi) \end{pmatrix} + \frac{(\mathcal{M} + 1)(\mathcal{M} - 3)}{16\mathcal{M}^2} \begin{pmatrix} \overline{R_q(\varphi)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_q(\varphi) \\ A_q(\varphi) \end{pmatrix} \quad (4.3.63)$$

Zur Bestimmung von  $\overline{R_q(\varphi)}$  mittelt man diese Gleichung über den Umfang des Einheitskreises und erhält

$$\frac{\mathcal{M}^2 - 1}{4\mathcal{M}^2} \overline{R_q(\varphi)} = \overline{A_q(\varphi)} \quad (4.3.64)$$

während die Tangentialkomponenten bei der Mittelung infolge der Momenten-Gleichgewichtsbedingung herausfallen. Damit kann (4.3.63) ohne Schwierigkeiten gelöst werden.

Die Hauptarbeit bei diesem Lösungsverfahren steckt nun in der Ausführung der Operation (4.3.60) zur Bestimmung von  $A_q(\varphi)$  und  $A_\varphi(\varphi)$ . Sie läßt sich z. B. mit Hilfe der Reihenentwicklung nach der zweiten Gleichung (4.3.9) durchführen. Eine andere Möglichkeit besteht in der Ausführung einer Quadratur, also der Zurückführung auf eine Integraltransformation mit singulärem Kern, mit der wir uns in der nächsten Ziffer beschäftigen werden. Natürlich wird die Regularisierung im allgemeinen Fall nicht auf eine Gleichung mit ausgearteten Operatoren führen; immerhin bietet auch die Anwendung vollstetiger Operatoren einige Vorteile bei gewissen Verfahren zur Konvergenzbeschleunigung (§ 5).

#### 4.4 Der Operator $\Pi^- U^\circ$ als Integraltransformation

##### 4.4.A. Der Operator $U^\circ$ .

Eine wichtige Rolle in der Integrationstheorie der homogenen wie der inhomogenen Navierschen Gleichung (3.3.15, 20) spielt die sogenannte Fundamentallösung, d. h. ein in jedem endlichen Teilbereich des homogenen unendlichen Mediums mit Ausnahme eines singulären Punktes definiertes Verschiebungsfeld, welches überall mit Ausnahme des singulären Punktes die homogenen Navierschen Gleichungen (3.3.15) erfüllt. Das Verhalten der Fundamentallösung im Unendlichen unterliegt gewissen Einschränkungen, und die Singularität entspricht einer auf die Einheit normierten Einzelkraft parallel zu einer Koordinatenachse. Die Fundamentallösung ist im räumlichen Fall für elastisch isotrope und anisotrope Medien ausführlich untersucht worden [1, 2, 27, 28, 33, 37, 43, 46, 48, 51, 102]. Im Falle des ebenen Spannungszustandes hat sie wegen der praktisch ausschließlichen Verwendung der Airyschen oder der Goursatschen Spannungsfunktionen weniger Interesse gefunden; sie läßt sich aber ohne Schwierigkeiten aus bekannten Spannungsfunktionensfeldern ableiten [4, 6, 43, 133].

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Verschiebung des „Aufpunktes“  $\mathbf{x} \triangleq x_i$  in der unendlichen Scheibe  $K^\circ$  unter der Einwirkung einer Kraft  $\vec{\mathcal{R}}$  mit den

Komponenten  $\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y$  im „Quellpunkt“  $\mathbf{x}' \triangleq x'_i$  zu berechnen. Der Vektor vom Quellpunkt zum Aufpunkt sei

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \triangleq \xi_i \triangleq \begin{pmatrix} x_1 - x'_1 \\ x_2 - x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (4.4.1)$$

und

$$\tilde{\varrho} = |\tilde{\mathbf{r}}| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (4.4.2)$$

Ferner sei der Verschiebungsvektor im Aufpunkt

$$\mathbf{w} \triangleq w_i = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.4.3)$$

$G$  sei der Schubmodul,  $\mathcal{M}$  die Querkontraktionszahl und  $h$  die Scheibendicke. Dann gilt beispielsweise im Fall der isotropen Scheibe [133] bis auf eine beliebige starre Bewegung

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{8\pi G h} \begin{pmatrix} -\frac{3\mathcal{M}-1}{\mathcal{M}} \ln \tilde{\varrho} + \frac{\mathcal{M}+1}{\mathcal{M}} \frac{\xi^2}{\tilde{\varrho}^2} & \frac{\mathcal{M}+1}{\mathcal{M}} \frac{\xi \eta}{\tilde{\varrho}^2} \\ \frac{\mathcal{M}+1}{\mathcal{M}} \frac{\xi \eta}{\tilde{\varrho}^2} & -\frac{3\mathcal{M}-1}{\mathcal{M}} \ln \tilde{\varrho} + \frac{\mathcal{M}+1}{\mathcal{M}} \frac{\eta^2}{\tilde{\varrho}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_x(x', y') \\ \mathcal{R}_y(x', y') \end{pmatrix} \quad (4.4.4)$$

Wir schreiben dafür kurz mit Summationsvereinbarung für zweimal im selben Produkt vorkommende Tensorindizes [92]

$$w_i(\mathbf{r}) = \mathfrak{U}_{ij}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathcal{R}_j(\mathbf{r}') \quad (4.4.5)$$

Der von den beiden Veränderlichen  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  abhängige Tensor 2. Stufe  $\mathfrak{U}_{ij}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  heißt die Fundamentallösung der Navierschen Gleichungen (3.3.15) für den ebenen Spannungszustand einer Scheibe der Dicke  $h$ .

Hat man nun an Stelle einer Einzelkraft eine Gleichgewichts-Kräftebelegung  $R_i(s')$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$ , so ergibt sich die Verschiebung in einem beliebigen Aufpunkt durch Integration von (4.4.5) nach den Koordinaten des Quellpunktes über die Kurve  $(S)$ . Legt man speziell auch den Aufpunkt auf die Kurve  $(S)$ , so folgt die Integraldarstellung der Anwendung von  $U^\circ$  zu

$$\mathbf{w} = U^\circ \mathbf{R} \triangleq w_i(s) = \oint_{(S)} \mathfrak{U}_{ij}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{r}') R_j(s') ds' \quad (4.4.6)$$

bis auf eine beliebige starre Bewegung, die man z. B. durch Vorgabe eines Festpunktes mit verschwindender Verschiebung und Drehung festlegen kann.

Da der tensorielle Kern  $\mathfrak{U}_{ij}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  des Integraloperators (4.4.6) nur logarithmisch singular ist, wirft diese Integration keine grundsätzlichen Schwierigkeiten auf, solange man sich auf glatte Kurven  $(S)$  und stetige Belastungen  $R_i(s')$  beschränkt, was wir im folgenden auch tun wollen. Diese Eigenschaft bleibt auch bei anisotropen homogenen Scheiben erhalten, nur wird der Ausdruck für  $\mathfrak{U}_{ij}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  etwas verwickelter als in (4.4.4). Erhalten bleibt auch eine Symmetrieeigenschaft des Verschiebungsfeldes der Fundamentallösung, nach der die Verschiebungen gleich sind in Aufpunkten, die dem

Quellpunkt in gleicher Entfernung diametral gegenüberliegen. Besonders deutlich wird dies, wenn man den Winkel zwischen der positiven  $x$ -Achse und dem Vektor  $\tilde{x}$  einführt durch

$$\cos \tilde{\varphi} = \frac{\xi}{\tilde{\varrho}}, \quad \sin \tilde{\varphi} = \frac{\eta}{\tilde{\varrho}} \quad (4.4.7)$$

Dann erhält man im isotropen Fall nach (4.4.4)

$$\mathfrak{U}_{ij}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \triangleq \frac{1}{8\pi Gh} \left( -\frac{3\mathcal{M}-1}{\mathcal{M}} \ln \tilde{\varrho} + \frac{\mathcal{M}+1}{\mathcal{M}} \cos^2 \tilde{\varphi} - \frac{\mathcal{M}+1}{\mathcal{M}} \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi} \right) \\ \left( \frac{\mathcal{M}+1}{\mathcal{M}} \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi} - \frac{3\mathcal{M}-1}{\mathcal{M}} \ln \tilde{\varrho} + \frac{\mathcal{M}+1}{\mathcal{M}} \sin^2 \tilde{\varphi} \right) \quad (4.4.8)$$

als Kernfunktion des Operators  $U^{\circ}$ .

#### 4.4.B. Die Grenzwertdefinition für $II-U^{\circ}$ .

Durch Deformatorbildung erhält man aus (4.4.5) das Dehnungsfeld der Einzelkraft  $\mathcal{R}_i(\mathfrak{x}')$  im Aufpunkt  $\mathfrak{x}$

$$\varepsilon_{ij}(\mathfrak{x}) = \frac{1}{2} \left( \partial_i \mathfrak{U}_{jk}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \partial_j \mathfrak{U}_{ik}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \right) \mathcal{R}_k(\mathfrak{x}') \quad (4.4.9)$$

wobei nur nach  $\mathfrak{x} \triangleq x_i$ , nicht aber nach  $\mathfrak{x}' \triangleq x'_i$  differenziert wird. Nach dem Hookeschen Gesetz (3.3.12) kann man daraus das Spannungsfeld berechnen durch

$$\sigma_{ij}(\mathfrak{x}) = \frac{1}{2} c_{ijmn} \left( \partial_m \mathfrak{U}_{nk}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \partial_n \mathfrak{U}_{mk}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \right) \mathcal{R}_k(\mathfrak{x}') \quad (4.4.10)$$

Schreiben wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{S}_{ijk}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') = \frac{1}{2} c_{ijmn} \left( \partial_m \mathfrak{U}_{nk}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \partial_n \mathfrak{U}_{mk}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \right) \quad (4.4.11)$$

so wird aus (4.4.10)

$$\sigma_{ij}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{S}_{ijk}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \mathcal{R}_k(\mathfrak{x}') \quad (4.4.12)$$

Der in den beiden Indizes  $i$  und  $j$  symmetrische und von den beiden veränderlichen Vektoren  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{x}'$  abhängige Tensor 3. Stufe  $\mathfrak{S}_{ijk}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}')$  gibt also das Spannungsfeld  $\sigma_{ij}(\mathfrak{x})$  einer Einzelkraft in Richtung  $k$  in der unendlichen Scheibe an. Außer durch Differentiation der Verschiebung läßt er sich

\*) Auf die Besonderheiten des Hookeschen Gesetzes für den ebenen Spannungszustand können wir hier nicht näher eingehen. Im allgemeinsten Fall der Anisotropie und der nichthomogenen Schichtung sind sogar Wechselwirkungen zwischen dem ebenen Spannungszustand und der Plattenbiegung vorhanden [16, 18], bei allgemeiner Anisotropie ohne Schichtung sind immer noch fast beliebige räumliche Dehnungszustände möglich [23]. Gewöhnlich werden nur die Fälle behandelt, in denen die Scheibenebene eine Symmetrieebene der elastischen Eigenschaften ist, insbesondere der Fall der Isotropie oder der Orthotropie [1-7, 100].

im ebenen Fall auch aus der *Airyschen* Spannungsfunktion einer Einzelkraft [4, 98] ableiten; auf diesem Wege fand *Seggelke* [133]

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_{xxx}^{\circ} &= \frac{1}{\tilde{\varrho}} \frac{\cos \tilde{\varphi}}{4 \pi h} \left( -\frac{3 \mathcal{M} + 1}{\mathcal{M}} + 2 \frac{\mathcal{M} + 1}{\mathcal{M}} \sin^2 \tilde{\varphi} \right) \\
 \mathfrak{E}_{yyy}^{\circ} &= \frac{1}{\tilde{\varrho}} \frac{\sin \tilde{\varphi}}{4 \pi h} \left( -\frac{3 \mathcal{M} + 1}{\mathcal{M}} + 2 \frac{\mathcal{M} + 1}{\mathcal{M}} \cos^2 \tilde{\varphi} \right) \\
 \mathfrak{E}_{xxy}^{\circ} &= \frac{1}{\tilde{\varrho}} \frac{\sin \tilde{\varphi}}{4 \pi h} \left( \frac{\mathcal{M} - 1}{\mathcal{M}} - 2 \frac{\mathcal{M} + 1}{\mathcal{M}} \cos^2 \tilde{\varphi} \right) \\
 \mathfrak{E}_{yyx}^{\circ} &= \frac{1}{\tilde{\varrho}} \frac{\cos \tilde{\varphi}}{4 \pi h} \left( \frac{\mathcal{M} - 1}{\mathcal{M}} - 2 \frac{\mathcal{M} + 1}{\mathcal{M}} \sin^2 \tilde{\varphi} \right) \\
 \mathfrak{E}_{xyx}^{\circ} &= \mathfrak{E}_{yxx}^{\circ} = \frac{1}{\tilde{\varrho}} \frac{\sin \tilde{\varphi}}{4 \pi h} \left( -\frac{\mathcal{M} - 1}{\mathcal{M}} - 2 \frac{\mathcal{M} + 1}{\mathcal{M}} \cos^2 \tilde{\varphi} \right) \\
 \mathfrak{E}_{xyy}^{\circ} &= \mathfrak{E}_{yyx}^{\circ} = \frac{1}{\tilde{\varrho}} \frac{\cos \tilde{\varphi}}{4 \pi h} \left( -\frac{\mathcal{M} - 1}{\mathcal{M}} - 2 \frac{\mathcal{M} + 1}{\mathcal{M}} \sin^2 \tilde{\varphi} \right)
 \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

Bevor wir weitergehen, betrachten wir noch etwas genauer die Struktur des Tensors  $\mathfrak{E}_{ijk}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}')$ . Zunächst stellen wir fest, daß sämtliche Komponenten des Tensors von der Form

$$\mathfrak{E}_{ijk}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') = \frac{\mathfrak{s}_{ijk}(\tilde{\varphi})}{\tilde{\varrho}} \tag{4.4.14}$$

sind, wobei

$$\mathfrak{s}_{ijk}(\tilde{\varphi}) = -\mathfrak{s}_{ijk}(\tilde{\varphi} + \pi) \tag{4.4.15}$$

gilt mit stetig nach  $\tilde{\varphi}$  differenzierbaren Funktionen  $\mathfrak{s}_{ijk}(\tilde{\varphi})$ . Wir werden sie im folgenden sogar als analytisch voraussetzen. Diese Eigenschaften bleiben auch bei Anisotropie erhalten; (4.4.15) folgt aus Symmetriebetrachtungen, (4.4.14) aus der Gleichgewichtsbedingung und der allgemeinen Forderung an die Fundamentallösung und ihre Ableitungen, daß sich ihre Komponenten als Produkte von Funktionen von  $\tilde{\varrho}$  und  $\tilde{\varphi}$  schreiben lassen müssen.

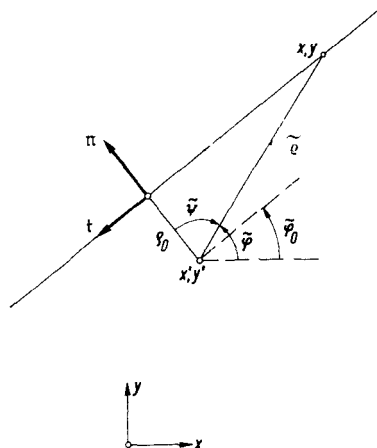
Zum Beweis der Allgemeingültigkeit von (4.4.14–15) überlegen wir zunächst, daß die Spannungsvektoren auf jeder beliebigen Kurve, die den Angriffspunkt  $\mathfrak{x}'$  einer Einzelkraft  $\vec{\mathcal{R}}(\mathfrak{x}')$  umschließt, gerade dieser Einzelkraft das Gleichgewicht halten müssen. Zeichnet man nun eine Anzahl ähnlicher Kurven in gleicher Lage um  $\mathfrak{x}'$ , so nimmt ihr Umfang mit ihren linearen Abmessungen zu. Nach der Zerlegbarkeitsforderung können sich die Spannungsvektorfunktionen auf zwei verschiedenen Kurven nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, und dieser Faktor kann nach der Gleichgewichtsbedingung nur umgekehrt proportional dem Umfang der Kurven sein. Da dies für beliebige Kurvenformen gelten muß, können die Komponenten (4.4.14) nur mit  $\frac{1}{\tilde{\varrho}}$  von  $\tilde{\varphi}$  abhängen.

Weiter betrachten wir den Spannungsvektor auf einer Geraden im Abstand  $\varrho_0$  vom Kraftangriffspunkt  $\mathfrak{x}'$ , dem vom Kraftangriffspunkt weg gerichteten Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{n} \triangleq n_i \triangleq \begin{pmatrix} -\sin \tilde{\varphi}_0 \\ \cos \tilde{\varphi}_0 \end{pmatrix} \quad (4.4.16)$$

und dem Tangenteneinheitsvektor  $\mathbf{t}$ , der mit der positiven  $x$ -Richtung den Winkel  $\tilde{\varphi}_0$  bildet.  $s$  sei die Strecke auf der Geraden, positiv genommen in Richtung  $\mathbf{t}$  und gerechnet vom Fußpunkt des Lotes von  $\mathfrak{x}'$  auf die Gerade

Abb. 4.4.1. Zur Ableitung von (4.4.14-15).



(Abb. 4.4.1). Dann müssen die Spannungsvektoren auf dieser Geraden der Einzelkraft in  $\mathfrak{x}'$  gerade zur Hälfte das Gleichgewicht halten; dies führt auf die Integralbedingung

$$h n_i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_{ijk}^{\circ} (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \mathcal{R}_k ds = -\frac{1}{2} \mathcal{R}_i \quad (4.4.17)$$

oder, da (4.4.17) für beliebige  $\mathcal{R}_k$  gelten muß, auf

$$n_i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_{ijk}^{\circ} (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') ds = -\frac{1}{2h} \delta_{jk} \quad (4.4.18)$$

wo  $\delta_{jk}$  das *Kronecker-Symbol* ist. Mit (4.4.14) und den Substitutionen

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= \frac{\pi}{2} - (\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0) \\ s &= -\operatorname{tg} \tilde{\psi} \\ \tilde{\varrho} &= \frac{\varrho_0}{\cos \tilde{\psi}} \\ ds &= -\frac{\varrho_0}{\cos^2 \tilde{\psi}} d\tilde{\psi} \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

wird daraus

$$\begin{aligned} & \sin \tilde{\varphi}_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\mathfrak{s}_{1jk} \left( \frac{\pi}{2} + \tilde{\varphi}_0 - \tilde{\psi} \right)}{\cos \tilde{\psi}} d\tilde{\psi} \\ & - \cos \tilde{\varphi}_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\mathfrak{s}_{2jk} \left( \frac{\pi}{2} + \tilde{\varphi}_0 - \tilde{\psi} \right)}{\cos \tilde{\psi}} d\tilde{\psi} = -\frac{1}{2h} \delta_{jk} \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

oder, da  $\cos \tilde{\psi}$  eine gerade Funktion von  $\tilde{\psi}$  ist,

$$\begin{aligned} & \sin \tilde{\varphi}_0 \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\mathfrak{s}_{1jk} \left( \frac{\pi}{2} + \tilde{\varphi}_0 - \tilde{\psi} \right) + \mathfrak{s}_{1jk} \left( \frac{\pi}{2} + \tilde{\varphi}_0 + \tilde{\psi} \right)}{\cos \tilde{\psi}} d\tilde{\psi} \\ & - \cos \tilde{\varphi}_0 \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\mathfrak{s}_{2jk} \left( \frac{\pi}{2} + \tilde{\varphi}_0 - \tilde{\psi} \right) + \mathfrak{s}_{2jk} \left( \frac{\pi}{2} + \tilde{\varphi}_0 + \tilde{\psi} \right)}{\cos \tilde{\psi}} d\tilde{\psi} = -\frac{1}{2h} \delta_{jk} \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

Diese Beziehung muß für jeden beliebigen Winkel  $\tilde{\varphi}_0$  gelten, also insbesondere auch, wenn man einen beliebigen Winkel  $\tilde{\varphi}_0^*$  durch  $\tilde{\varphi}_0^* + \pi$  ersetzt. Hierbei wechseln die Vorfaktoren  $\sin \tilde{\varphi}_0$  und  $\cos \tilde{\varphi}_0$  das Vorzeichen; also müssen auch die Integrale das Vorzeichen wechseln. Da dies für jedes beliebige  $\tilde{\varphi}_0^*$  gelten muß, können wir vom Integral auf den Integranden weiterschließen und erhalten so die Antisymmetriebeziehung (4.4.15).

Nun suchen wir das Spannungsfeld einer Gleichgewichts-Kräftebelegung

$$R \triangleq R_i(s) \quad (4.4.22)$$

auf  $(S)$  in  $K^\circ$  zu bestimmen und aus diesem Spannungsfeld den Anteil

$$Q \triangleq Q_i(s) \quad (4.4.23)$$

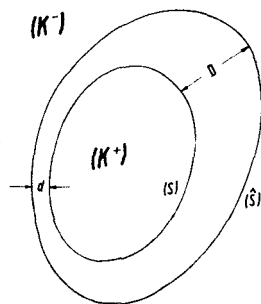
der Kräftebelegung  $R$ , welcher vom Teilgebiet  $(K^-)$  in  $K^\circ$  aufgenommen wird. Zunächst erhält man das Spannungsfeld der Kräftebelegung  $R$  auf  $(S)$  in einem nicht auf  $(S)$  gelegenen Aufpunkt  $\mathfrak{x}$  durch Integration von (4.4.12) nach den Koordinaten des Quellpunktes über die ganze Kurve  $(S)$  zu

$$\sigma_{ij}(\mathfrak{x}) = \oint_{(S)} \mathfrak{G}_{ijk}^\circ(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') R_k(s') ds' \quad (4.4.24)$$

Auf der Kurve  $(S)$  selbst hat aber dieser Ausdruck nach (4.4.14) keinen Sinn, da dort die Komponenten von  $\mathfrak{S}_{ijk}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}')$  mit  $\frac{1}{Q}$  über alle Grenzen wachsen; diese Singularität ist — im Gegensatz zu der „schwachen“ Singularität von  $\mathfrak{U}_{ij}^{\circ}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}')$  — zu stark, als daß noch ein uneigentliches Integral unabhängig von der Annäherung des Quellpunkts an den Aufpunkt eindeutig definiert werden könnte [40–42, 135, 136]. Daß das Spannungsfeld auf  $(S)$  selbst nicht erklärt sein kann, ist im übrigen für  $R \neq 0$  schon aus (4.2.14) ersichtlich. Man schließt daraus, daß die Normalspannung und die Schubspannung in einem Schnitt tangential zu  $(S)$  auf  $(S)$  um  $\frac{1}{h} R_n(s)$  bzw.  $\frac{1}{h} R_t(s)$  springen müssen, wo  $R_n(s)$  und  $R_t(s)$  die Normal- und die Tangentialkomponente der Kräftebelegung  $R$  auf  $(S)$  in  $K^{\circ}$  sind.

Es kann sich also nur darum handeln, den Grenzwert des Spannungsfeldes bei der Annäherung des Aufpunktes  $\mathfrak{x}$  aus  $(K^-)$  an  $(S)$  zu bestimmen und daraus den von  $(K^-)$  aufgenommenen Anteil  $Q$  der Kräftebelegung  $R$  auf  $(S)$  in  $K^{\circ}$  nach (3.3.18) zu berechnen. Zu diesem Zweck zeichnen wir eine glatte Kurve  $(\hat{S})$  in  $(K^-)$  ein, welche das Innengebiet  $(K^+)$  ganz umschließt, die Kurve  $(S)$  nirgends berührt und sich, ohne das Innengebiet  $(K^+)$  zu überstreichen, stetig in die Kurve  $(S)$  überführen läßt (Abb. 4.4.2). Die Kurve  $(\hat{S})$  zerlegt ähnlich

Abb. 4.4.2. Zur Grenzwertdarstellung des Operators  $\Pi^{-} U^{\circ}$



wie  $(S)$  den Grundkörper  $K^{\circ}$  in zwei Gebiete, von denen wenigstens eines, nämlich das Teilgebiet, welches den gesamten Bereich  $(K^+)$  samt  $(S)$  enthält, einfach oder mehrfach zusammenhängt. Den übrigen Teil von  $K^{\circ}$  bezeichnen wir als Außengebiet  $(\hat{K}^-)$  von  $(\hat{S})$ . Den in das Außengebiet  $(\hat{K}^-)$  von  $(\hat{S})$  weisenden Normaleneinheitsvektor auf  $(\hat{S})$  bezeichnen wir mit

$$\hat{n}(\hat{s}) \triangleq \hat{n}_t(\hat{s}) \quad (4.4.25)$$

wo  $\hat{s}$  die Bogenlänge auf der Kurve  $(\hat{S})$  ist. Nun sei der Aufpunkt

$$\hat{\mathfrak{x}} = \hat{\mathfrak{x}}(\hat{s}) \quad (4.4.26)$$

auf  $(\hat{S})$  gelegen. Dann ist die Kräftebelegung, die unter der Einwirkung der



Kräftebelegung  $R$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  vom Außengebiet  $(\hat{K}^-)$  der Kurve  $(\hat{S})$  aufgenommen wird, nach (3.3.18) und (4.4.24)

$$\hat{Q} \triangleq Q_j(\hat{s}) = -h \hat{n}_i(\hat{s}) \sigma_{ij}(\mathbf{r}) = -h \hat{n}_i(\hat{s}) \oint_{(\hat{S})} \mathfrak{S}_{ijk}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{r}') R_k(s') ds' \quad (4.4.27)$$

(Bei der Wahl des Vorzeichens beachte man, daß  $\hat{n}$  in das Außengebiet  $(\hat{K}^-)$  von  $(\hat{S})$  hineinweist.)

Den gesuchten, vom Außengebiet  $(K^-)$  der Kurve  $(S)$  in  $K^\circ$  aufgenommenen Anteil  $Q$  der Kräftebelegung  $R$  auf  $(S)$  erhalten wir als Grenzwert, wenn wir die Kurve  $(\hat{S})$  gegen die ebenfalls als glatt vorausgesetzte Kurve  $(S)$  rücken lassen, wobei der Normaleneinheitsvektor (4.4.25) von  $(\hat{S})$  übergeht in den Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{n}(s) \triangleq \mathbf{n}_i(s) \quad (4.4.28)$$

von  $(S)$ , und der Aufpunkt  $\mathbf{r}(\hat{s})$  auf  $(\hat{S})$  in

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \quad (4.4.29)$$

auf  $(S)$ , wo  $s$  die Bogenlänge auf der Kurve  $(S)$  ist. Damit erhalten wir die gesuchte Grenzwertdarstellung des Operators  $\Pi^- U^\circ$  aus (4.1.17)

$$Q = (\Pi^- U^\circ) R \triangleq Q_j(s) = -\lim_{(\hat{S}) \rightarrow (S)} h \hat{n}_i(\hat{s}) \oint_{(\hat{S})} \mathfrak{S}_{ijk}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{r}') R_k(s') ds' \quad (4.4.30)$$

und mit (4.1.22–23) die entsprechende Grenzwertdarstellung des Operators  $\Pi^+ U^\circ$

$$P = (\Pi^+ U^\circ) R \triangleq P_j(s) = R_j(s) + \lim_{(\hat{S}) \rightarrow (S)} h \hat{n}_i(\hat{s}) \oint_{(\hat{S})} \mathfrak{S}_{ijk}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{r}') R_k(s') ds' \quad (4.4.31)$$

Wir haben nun zu zeigen, wie man diese Grenzwerte in geschlossener Form oder näherungsweise numerisch berechnen kann. Dies gelingt durch Zurückführung der Grenzwerte (4.4.30–31) auf den *Cauchyschen* Hauptwert eines singulären Integrals.

**4.4.C.** Die Darstellung von  $\Pi^- U^\circ$  mit Hilfe des *Cauchyschen* Hauptwerts einer Integraltransformation mit singulärem Kern.

Wir bezeichnen mit dem Symbol  $\oint_{(S)}^\circ$  den *Cauchyschen* Hauptwert eines Integrals über eine geschlossene Kurve mit singulärem Integranden, falls dieser Hauptwert existiert [29, 40–42, 64, 135–139]. Dann folgt, wie wir sogleich beweisen werden, beim Grenzübergang aus (4.4.30)

$$Q = (\Pi^- U^\circ) R \triangleq Q_j(s) = \frac{1}{2} R_j(s) - h n_i(s) \oint_{(S)}^\circ \mathfrak{S}_{ijk}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{r}') R_k(s') ds' \quad (4.4.32)$$

und entsprechend aus (4.4.31)

$$P = (\Pi^+ U^\circ) R \triangleq P_j(s) = \frac{1}{2} R_j(s) + h n_i(s) \mathbf{r} \oint_{(S)} \mathbf{r} \mathfrak{E}_{ijk}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{r}') R_k(s') ds' \quad (4.4.33)$$

Die Anwendung der Operatoren  $\Pi^- U^\circ$  und  $\Pi^+ U^\circ$  kann also im wesentlichen auf eine Integraltransformation mit dem singulären, sowohl bezüglich der Tensorindizes  $i$  und  $j$  als auch bezüglich der Argumente  $s$  und  $s'$  unsymmetrischen Kern

$$k_{ij}(s, s') = h n_k(s) \mathfrak{E}_{kij}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.4.34)$$

zurückgeführt werden. Dann erscheinen die Gleichungen (4.4.32–33) in der kürzeren Form

$$Q = (\Pi^- U^\circ) R \triangleq Q_i(s) = \frac{1}{2} R_i(s) - \mathbf{r} \oint_{(S)} k_{ij}(s, s') R_j(s') ds' \quad (4.4.35)$$

bzw.

$$P = (\Pi^+ U^\circ) R \triangleq P_i(s) = \frac{1}{2} R_i(s) + \mathbf{r} \oint_{(S)} k_{ij}(s, s') R_j(s') ds' \quad (4.4.36)$$

Die Integraldarstellung der Anwendung der Operatoren  $\Pi^- U^\circ$  und  $\Pi^+ U^\circ$  von rechts auf eine Verschiebung nach (4.2.25) ergibt sich aus (4.4.35–36) durch Vertauschung sowohl von  $i$  mit  $j$  als auch von  $s$  mit  $s'$ . Sei also

$$u = U^\circ P, \quad v = U^\circ Q, \quad w = U^\circ R \quad (4.4.37)$$

dann gilt für (4.4.35)

$$v = w (\Pi^- U^\circ) \triangleq v_i(s) = \frac{1}{2} w_i(s) - \mathbf{r} \oint_{(S)} k_{ji}(s', s) w_j(s') ds' \quad (4.4.38)$$

und für (4.4.36)

$$u = w (\Pi^+ U^\circ) \triangleq u_i(s) = \frac{1}{2} w_i(s) + \mathbf{r} \oint_{(S)} k_{ji}(s', s) w_j(s') ds' \quad (4.4.39)$$

Um diese Herleitung von (4.4.38–39) aus (4.4.35–36) zu rechtfertigen, genügt es zu zeigen, daß die Skalarprodukte (4.2.32–33) durch diese Integraltransformationen eindeutig und vertauschbar bestimmt sind; alles weitere folgt dann aus dem formalen Kalkül im Zustandsraum  $S$  von § 4.2. Das trifft aber sicher zu, wenn für zwei beliebige Zustände  $\hat{g}$  und  $\hat{g}'$ , repräsentiert durch die Verschiebung  $\hat{w}$  und die Kräftebelegung  $\hat{R}$  auf  $(S)$ , die Gleichung

$$\oint_{(S)} \left( \mathbf{r} \oint_{(S)} k_{ij}(s, s') \hat{w}_i(s) \hat{R}_j(s') ds \right) ds' = \oint_{(S)} \left( \mathbf{r} \oint_{(S)} k_{ij}(s, s') \hat{w}_i(s) \hat{R}_j(s') ds' \right) ds \quad (4.4.40)$$

gilt, also die Integrationsreihenfolge in diesem Doppelintegral vertauscht werden kann. Das aber läßt sich wiederum aus der Existenz des *Cauchy*schen Hauptwerts und der vorausgesetzten Stetigkeit von  $\hat{w}$  und  $\hat{R}$  ableiten.

Nun ist noch der Beweis für die Darstellungen (4.4.32–33) für eine überall glatte und stückweise analytische Kurve  $(S)$  mit überall stetiger und stückweise analytischer Belastung  $R$  nachzutragen. Wir führen ihn auf eine Art, die gleichzeitig Hinweise auf die numerische Berechnung einer finiten Ersatzmatrix liefert, indem wir alle Anteile abspalten, die sich auf ein Integral mit beschränktem Integranden zurückführen lassen („reguläre Beiträge zum Cauchyschen Hauptwert“) und so der eigentlichen Singularität eine möglichst einfache Form geben.

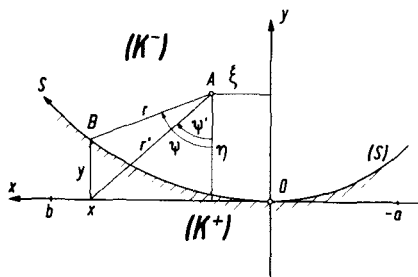


Abb. 4.4.3. Zum Grenzübergang  $(\hat{S}) \rightarrow (S)$  bei Annäherung von  $A$  an den Stützpunkt  $O$ .

Wir führen nach Abb. 4.4.3 ein Koordinatensystem ein mit dem Stützpunkt  $O$  als Ursprung, der  $x$ -Achse in Tangentialrichtung und der  $y$ -Achse in Normalenrichtung\*). Der Aufpunkt  $A$  mit dem Ortsvektor  $\hat{\mathbf{r}}$  hat in diesem System die Koordinaten  $(\xi, \eta)$ ; er soll beim Grenzübergang gegen den Stützpunkt  $O$  rücken. Ordnen wir nun einem Quellpunkt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}'$  auf  $(S)$  die Koordinaten  $(x, y)$  zu, so erscheint jede Komponente der Kernfunktion  $\hat{n}_j(\hat{s}) \hat{\mathfrak{S}}_{ijk}^\circ(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}')$  aus (4.4.30) nach (4.4.14–15) in der Form

$$k(\xi, \eta; x, y) = \frac{f(\psi; \xi, \eta)}{r} \quad (4.4.41)$$

wo der Zähler  $f(\psi; \xi, \eta)$  in  $\xi$  und  $\eta$  differenzierbar und überall nach  $\psi$  in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Ferner ist

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \quad (4.4.42)$$

und

$$\psi = -\arctg \frac{x - \xi}{y - \eta} = \pm \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{y - \eta}{x - \xi} \quad (4.4.43)$$

Wegen der Symmetrieeigenschaften von  $\hat{\mathfrak{S}}_{ijk}^\circ(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}')$  gilt ferner

$$f(\psi + \pi; \xi, \eta) + f(\psi; \xi, \eta) = 0 \quad (4.4.44)$$

sowie die Entwicklungen in der Umgebung von  $\psi = \frac{\pi}{2}$  und  $\psi = -\frac{\pi}{2}$

\*) Daß wir dadurch für  $(x, y)$  ein Linkssystem erhalten, ist für das folgende ohne Bedeutung.

$$f(\psi; \xi, \eta) = f_0(\xi, \eta) + f_1(\xi, \eta) \cdot \left( \psi - \frac{\pi}{2} \right) + \dots \text{ für } \psi > 0 \quad (4.4.45)$$

$$f(\psi; \xi, \eta) = -f_0(\xi, \eta) - f_1(\xi, \eta) \cdot \left( \psi + \frac{\pi}{2} \right) + \dots \text{ für } \psi < 0^* \quad (4.4.46)$$

Die Gleichung der Randkurve ( $S$ ) in der Umgebung des Stützpunktes  $O$  sei

$$y = \frac{1}{2} \kappa x^2 + \dots \quad (4.4.47)$$

wo die Krümmungen  $\kappa$  auf beiden Seiten im allgemeinen verschieden seien, also

$$\kappa = \kappa^+ \quad \text{für } x > 0 \quad (4.4.48)$$

$$\kappa = \kappa^- \quad \text{für } x < 0$$

Die Randkurve sei also stückweise analytisch derart, daß in den endlich vielen Ausnahmepunkten noch eine Tangente vorhanden ist. Dann stimmen auch die ersten Entwicklungskoeffizienten einer Komponente der Belastungsfunktion  $p(s)$  nach  $s$  und  $x$  überein:

$$p(s) = p_0 + p_1 s + \dots = p_0 + p_1 x + \dots \quad (4.4.49)$$

Hier soll  $p_0$  beiderseits  $O$  gleich sein, während  $p_1$  verschiedene Werte annehmen kann, also

$$p_1 = p_1^+ \quad \text{für } x > 0$$

$$p_1 = p_1^- \quad \text{für } x < 0 \quad (4.4.50)$$

Bei der Belastungsfunktion wird also in den Ausnahmepunkten nur Stetigkeit verlangt.

Nun ist für jede einzelne Komponente von  $Q_i(s)$  in (4.4.30) ein Integral der Form

$$Q = \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \int_{-a}^{+b} \frac{f(\psi; \xi, \eta)}{r} p(s) ds \quad (4.4.51)$$

zu berechnen. Da wir uns hier nur für den Grenzfall eines gegenüber dem Krümmungsradius kleinen Integrationsbereichs interessieren, können wir dies wegen

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \kappa^2 x^2 dx^2} = dx \left( 1 + \frac{1}{2} \kappa^2 x^2 \right) \quad (4.4.52)$$

\*) Man beachte bei der Berechnung von  $f_1(0, 0)$  das besondere Verhalten der Tensor-komponenten, welches durch die Veränderlichkeit der Tangentenrichtung in  $B$  an  $(S)$  mit  $\psi$  bedingt ist (im Grenzfall dreht sich die Tangente mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit; vgl. Abb. 4.4.3).

nach (4.4.49) entwickeln

$$Q = p_0 \cdot \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \int_{-a}^b \frac{f(\psi; \xi, \eta)}{r} dx + p_1 \cdot \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \int_{-a}^b \frac{x}{r} f(\psi; \xi, \eta) dx + \dots \quad (4.4.53)$$

wo der Integrand der höheren Glieder für  $x \rightarrow 0$  verschwindet, also der numerischen Quadratur ohne weiteres zugänglich ist und in diesem Zusammenhang nicht interessiert. Einen regulären Beitrag zum *Cauchyschen* Hauptwert liefert das zweite Glied; denn es gilt wegen (4.4.42–43) und (4.4.45–47) für den Integranden

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \frac{x}{r} f(\psi; \xi, \eta) \right\} \\ &= p_1 \cdot f_0(0, 0) \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} \psi = p_1 f_0(0, 0) \end{aligned} \quad (4.4.54)$$

und somit bei Annäherung von verschiedenen Seiten auf  $(S)$  an den Stützpunkt

$$\begin{aligned} q_1^+ &= p_1^+ f_0(0, 0) \quad \text{für } x \rightarrow +0 \\ q_1^- &= p_1^- f_0(0, 0) \quad \text{für } x \rightarrow -0 \end{aligned} \quad (4.4.55)$$

Daraus folgt der reguläre Beitrag der Belastung zum *Cauchyschen* Hauptwert. Einen ähnlichen Beitrag können wir vom ersten Glied abspalten. Wir führen dazu ein (Abb. 4.4.3)

$$\psi' = \arctan \frac{x - \xi}{\eta} = \pm \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\eta}{x - \xi} \quad (4.4.56)$$

und zerlegen das erste Glied von (4.4.53)

$$\begin{aligned} & p_0 \cdot \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \int_{-a}^b \frac{f(\psi; \xi, \eta)}{r} dx \\ &= p_0 \cdot \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \left\{ \int_{-a}^b \frac{f(\psi; \xi, \eta) - f(\psi'; \xi, \eta)}{r} dx + \int_{-a}^b \frac{f(\psi'; \xi, \eta)}{r} dx \right\} \end{aligned} \quad (4.4.57)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung [142] gibt es nun wenigstens einen zwischen  $\psi$  und  $\psi'$  gelegenen Wert  $\tilde{\psi}$  derart, daß sich der Nenner des ersten Integranden nach

$$f(\psi; \xi, \eta) - f(\psi'; \xi, \eta) = \frac{\partial f}{\partial \psi} \bigg|_{(\tilde{\psi}; \xi, \eta)} (\psi - \psi') \quad (4.4.58)$$

umschreiben läßt. Mit (4.4.43, 47, 56) entwickelt man nun diesen Ausdruck

für  $\kappa x, \frac{\xi}{x}, \frac{\eta}{x} \ll 1$

$$\begin{aligned}
 f(\psi; \xi, \eta) &= f(\psi'; \xi, \eta) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial \psi} \bigg|_{(\tilde{\psi}; \xi, \eta)} \left( \frac{1}{2} \kappa x^2 - \eta \right. \\
 &\quad \left. \arctan \frac{\frac{1}{2} \kappa x^2 - \eta}{x - \xi} + \arctan \frac{\eta}{x - \xi} \right) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial \psi} \bigg|_{(\tilde{\psi}; \xi, \eta)} \left( \frac{1}{2} \kappa x + \dots \right)
 \end{aligned} \tag{4.4.59}$$

und setzt dies in den Integranden des ersten Gliedes von (4.4.57) ein. Überlegt man, daß beim Grenzübergang  $\psi$  und  $\psi'$  gemeinsam gegen  $\pm \frac{\pi}{2}$  streben, so findet man für den Integranden ähnlich wie in (4.4.54)

$$\begin{aligned}
 q_2 &= p_0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial \psi} \bigg|_{(\tilde{\psi}; \xi, \eta)} \left( \frac{1}{2} \kappa \frac{x}{r} + \dots \right) \right. \\
 &\quad \left. = \frac{1}{2} p_0 \cdot \kappa f_1(0, 0) \cdot \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} \tilde{\psi} = \frac{1}{2} p_0 \kappa f_1(0, 0) \right.
 \end{aligned} \tag{4.4.60}$$

und somit bei Annäherung von verschiedenen Seiten auf (S) an den Stützpunkt

$$\begin{aligned}
 q_2^+ &= \frac{1}{2} p_0 \kappa^+ f_1(0, 0) \quad \text{für } x \rightarrow +0 \\
 q_2^- &= \frac{1}{2} p_0 \kappa^- f_1(0, 0) \quad \text{für } x \rightarrow -0
 \end{aligned} \tag{4.4.61}$$

Daraus folgt der reguläre Beitrag der Krümmung von (S) zum *Cauchyschen* Hauptwert (4.4.35).

Vom zweiten Integral in (4.4.57) läßt sich wiederum ein regulärer Anteil abtrennen. Wir führen dazu ein (Abb. 4.4.3)

$$r' = \sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2} \tag{4.4.62}$$

und zerlegen

$$\int_{-a}^b \frac{f(\psi'; \xi, \eta)}{r} dx = \int_{-a}^b f(\psi'; \xi, \eta) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) dx + \int_{-a}^b \frac{f(\psi'; \xi, \eta)}{r'} dx \tag{4.4.63}$$

Wir zeigen, daß der Integrand des ersten Gliedes gegen Null strebt, wenn man zunächst den Aufpunkt  $A(\xi, \eta)$  für nicht verschwindendes  $x$  aus dem Innern von  $(K^-)$  in den Ursprung rücken und dann die Integrationsveränderliche  $x$  gegen Null streben läßt. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeitseigenschaften von  $f(\psi; \xi, \eta)$  genügt es, wenn wir dies für den Faktor  $\left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$  nachweisen. Nun ist mit (4.4.42, 47, 62) bis auf Glieder höherer Ordnung in  $x$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \left( \frac{\lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \left( \frac{1}{2} \kappa x^2 + \dots - \eta \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4} \kappa^2 x^4 + \dots}} - \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \kappa^2 x^2 + \dots}} - 1 \right) \quad (4.4.64)
\end{aligned}$$

Der Inhalt der letzten Klammer läßt sich für  $\frac{1}{4} \kappa^2 x^2 \ll 1$  entwickeln ([142], Teil II, § 45)

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \kappa^2 x^2 + \dots}} - 1 = -\frac{1}{8} \kappa^2 x^2 + \dots \quad (4.4.65)$$

Nach Division mit  $|x| \neq 0$  folgt

$$\lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) = -\frac{1}{8} \kappa^2 |x| + \dots \quad (4.4.66)$$

woraus man sofort den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \right) = 0 \quad (4.4.67)$$

abliest. Damit folgt auch der Grenzwert des Integranden im ersten Glied von (4.4.63)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} f(\psi'; \xi, \eta) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \right) = 0. \quad (4.4.68)$$

Für das letzte Integral in (4.4.63) ist kein endlicher Grenzwert des Integranden mehr nachzuweisen; wir müssen daher den Grenzwert des Integrals als Ganzes bestimmen. Seinen Beitrag zu (4.4.57) bezeichnen wir mit  $Q_3$ ; ein Blick auf Abb. 4.4.3 zeigt, daß er von der Krümmung der Randkurve ( $S$ ) unabhängig ist. Durch die Substitution

$$x - \xi = \eta \operatorname{tg} \psi', \quad dx = \eta \frac{d\psi'}{\cos^2 \psi'}, \quad r' = \frac{\eta}{\cos \psi'} \quad (4.4.69)$$

mit den neuen Integrationsgrenzen

$$\begin{aligned}
\psi'_b &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{b - \xi} \\
\psi'_a &= -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{a + \xi}
\end{aligned} \quad (4.4.70)$$

erhält man nach Multiplikation mit dem Vorfaktor  $p_0$  aus (4.4.57)

$$\begin{aligned}
Q_3 &= p_0 \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \int_{-a}^b \frac{f(\psi'; \xi, \eta)}{r'} dx \\
&= p_0 \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \int_{\psi'_a}^{\psi'_b} \frac{f(\psi'; \xi, \eta)}{\cos \psi'} d\psi' \\
&= p_0 \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \left( \int_{-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} - \int_{\psi'_b}^{\psi'_a} - \int_{\psi'_b}^{\frac{\pi}{2}} \right) \frac{f(\psi'; \xi, \eta)}{\cos \psi'} d\psi' \quad (4.4.71)
\end{aligned}$$

Wir berechnen zuerst die beiden letzten Teilintegrale. Durch Einsetzen der Entwicklung (4.4.45–46) erhalten wir nach Einführung der neuen Integrationsveränderlichen

$$\vartheta = \psi' - \frac{\pi}{2} \quad \text{für } \psi' > 0, \quad \vartheta = \psi' + \frac{\pi}{2} \quad \text{für } \psi' < 0 \quad (4.4.72)$$

$$\begin{aligned}
Q'_3 &= p_0 \cdot \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \left( - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\psi'_a} - \int_{\psi'_b}^{\frac{\pi}{2}} \right) \frac{f(\psi'; \xi, \eta)}{\cos \psi'} d\psi' \\
&= p_0 \cdot \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\vartheta=0}^{\arctg \frac{\eta}{a+\xi}} \frac{f_0(\xi, \eta) - \vartheta \cdot f_1(\xi, \eta)}{\sin \vartheta} d\vartheta \right. \\
&\quad \left. - \int_{\vartheta=0}^{\arctg \frac{\eta}{b-\xi}} \frac{f_0(\xi, \eta) + \vartheta \cdot f_1(\xi, \eta)}{\sin \vartheta} d\vartheta \right\} \\
&= p_0 \cdot \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} f_0(\xi, \eta) \cdot \ln \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \arctg \frac{\eta}{a+\xi} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \arctg \frac{\eta}{b-\xi} \right)} \\
&\quad + p_0 \cdot \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} f_1(\xi, \eta) \cdot \left( \int_{\vartheta=0}^{\arctg \frac{\eta}{a+\xi}} - \int_{\vartheta=0}^{\arctg \frac{\eta}{b-\xi}} \right) \frac{\vartheta}{\sin \vartheta} d\vartheta \\
&= p_0 \cdot f_0(0, 0) \cdot \ln \frac{b}{a} \quad (4.4.73)
\end{aligned}$$



Die nur unter der Voraussetzung der gleichen Annäherung der Integrationsgrenze  $\vartheta = 0$  in beiden Integralen der zweiten und dritten Zeile mögliche Annahme, daß sich die divergenten Teile gegenseitig wegheben, wird weiter unten durch unsere Behandlung des ersten Teilintegrals in (4.4.71) gerechtfertigt, welches ebenfalls nur unter der Voraussetzung gleicher Annäherung beider Integrationsgrenzen konvergiert. Diese sind aber mit den unteren Grenzen in (4.4.73) identisch. (4.4.73) ist der *Cauchysche* Hauptwert von  $\int_{-a}^b dx/x$  und verschwindet für  $b = a$ . Wichtig ist noch die Bemerkung, daß die Annäherung von  $A$  an  $O$  auf einem völlig beliebigen Wege erfolgen kann; es darf nur das letzte Stück davon nicht auf  $(S)$  verlaufen oder  $(S)$  in  $O$  berühren (*Stolz*scher Weg).

Das erste Teilintegral in (4.4.71) schließlich läßt sich nach (4.4.44) umformen

$$\begin{aligned} Q_3'' &= p_0 \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{f(\psi'; \xi, \eta)}{\cos \psi'} d\psi' \\ &= p_0 \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\psi'; \xi, \eta) + f(-\psi'; \xi, \eta)}{\cos \psi'} d\psi' = p_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\psi'; 0, 0) + f(-\psi'; 0, 0)}{\cos \psi'} d\psi' \end{aligned} \quad (4.4.74)$$

Wegen (4.4.45–46) verschwindet der Zähler des Integranden an der oberen Integrationsgrenze von gleicher Ordnung wie der Nenner; das Integral ist also beschränkt. Seine physikalische Bedeutung ergibt sich durch Vergleich mit (4.4.21). Man leitet aus der für die Fundamentallösung definitionsgemäß gültigen Gleichgewichtsbedingung (4.4.17) ab, daß (4.4.74) auf den Beitrag  $\frac{1}{2} R_i(s)$  vor dem Integral in (4.4.35) führt.

Damit haben wir die Gültigkeit der Integraldarstellung (4.4.35) für stückweise analytische und durchweg glatte Kurven  $(S)$  mit stückweise analytischer und durchweg stetiger Belastung nachgewiesen, und zwar durch Ausführung des Grenzübergangs (4.4.30) für ein Teilintervall der Kurve  $(S)$ , welches den Aufpunkt in seinem Innern enthält (kurz: für ein „Aufpunktintervall“). Der *Cauchysche* Hauptwert ist bestimmt durch (4.4.55, 61, 73), das integralfreie Glied durch (4.4.74). Grob-anschaulich kann man den *Cauchyschen* Hauptwert in (4.4.35) ansehen als den Beitrag aller Kräfte zu  $Q_i(s)$ , die nicht im Aufpunkt selbst angreifen, und das integralfreie Glied als den Beitrag der Kräftebelegung im Aufpunkt selbst. Freilich wäre diese Betrachtungsweise zu ungenau, um darauf die Rechnung zu gründen; tatsächlich ist (4.4.35) nur durch den Grenzübergang (4.4.30) wirklich zu rechtfertigen. Integralfreie Glieder treten auch in der Theorie der Integralgleichungen von *Mus'chelischwili* sowie *Lauricella* und *Scherman* auf; entsprechend ihrer komplexen Formulierung wird dort zu ihrer Herleitung der Satz von *Plemelj* aus der Funktionentheorie benutzt [2, 3, 5, 6, 37, 41, 42].

#### 4.4.D. Zur numerischen Rechnung

Die numerische Lösung eines Randwertproblems besteht aus zwei Teilaufgaben, nämlich einmal der Aufstellung des „finiten“ algebraischen Ersatzgleichungssystems und zum anderen der Lösung dieses finiten Systems [31]. Bei der Entwicklung numerischer Verfahren hat man anzustreben, einen möglichst großen Teil der Gesamtaufgabe einer programmgesteuerten Rechenmaschine zu übertragen; das prinzipiell mögliche Optimum ist dann erreicht, wenn sich die Arbeit des Rechners auf die Eingabe der geometrischen Daten der Kurve ( $S$ ) und der Belastungsfunktion  $[P]$  an den Stützstellen beschränkt. Während nun der zweite Teil der Aufgabe — außer der Notwendigkeit „externer“ Speicherung bei sehr umfangreichen Gleichungssystemen [133] — programmierungstechnisch keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bietet, kann der erste Teil, nämlich die Aufstellung des finiten Gleichungssystems für die üblichen, mit Gitternetzen auf der Scheibenfläche arbeitenden Verfahren, den Programmierer vor fast unlösbaren Aufgaben stellen, wenn die Berandung dem Gitternetz nicht angepaßt ist\*). Bessere Aussichten für den ersten Teil der Aufgabe bei beliebigen Scheibenformen bieten die Integralgleichungsverfahren, die ausschließlich auf dem Rande arbeiten; ein entsprechendes Verfahren wurde in der Potentialtheorie bereits von *Martensen* [55] ausgearbeitet und praktisch erprobt. Der Ausarbeitung eines analogen Verfahrens für die Gleichung (4.4.35) dienen nun die Rechenversuche von *Seggelke* [133], die wir im folgenden diskutieren wollen\*\*).

Es war von vornherein zu erwarten, daß der Übergang zum finiten Gleichungssystem für die Operatorgleichung (4.1.18) nach Einführung der Integraldarstellung (4.4.35) wegen der Singularität des Kerns besondere Probleme aufwerfen würde; tatsächlich bezieht sich die bei *Kantorowitsch* und *Krylow* [63] angegebene Fehlerabschätzung nur auf differenzierbare Kerne. Trotzdem wurde für die ersten Rechenversuche von *Seggelke* der einfacheren Programmierung wegen die numerische Integration nach der relativ rohen „Rechtecksmittenregel“ zugrundegelegt; das heißt die Kräftebelegung  $[R_i]$  wurde durch Einzelkräfte in der Intervallmitte ersetzt und die Kernfunktion ebenfalls auf die Intervallmitte bezogen. Für den Aufpunkt selbst wurden die Beiträge (4.4.55, 61) des Aufpunktintervalls zum *Cauchyschen* Hauptwert in (4.4.35)

völlig vernachlässigt und nur der Beitrag  $\frac{1}{2} [R_i]^{n-1}$  vor dem Integral berücksichtigt. Wie erwartet wirkten sich diese Vernachlässigungen besonders bei stark veränderlicher Belastung aus. Für konstanten Zug an einer Kreisscheibe ergab sich so bei 48 Randpunkten nur noch ein Fehler von 1,6%, während das Ergebnis für eine durch zwei Einzelkräfte belastete Kreisscheibe wesentlich schlechter ausfiel. Immerhin zeigen die in Abb. 4.4.4 skizzierten Rechenergebnisse eine deutliche Annäherung an die nach § 4.3 durch eine Reihenentwicklung bestimmte exakte Lösung mit zunehmender Zahl der Randpunkte,

\*) Für rechtwinklig begrenzte Platten vgl. *Rósa* [162].

\*\*) Der Verfasser möchte Herrn *Seggelke* sehr herzlich für seine mit großem Fleiß, Geschick und Einfühlungsvermögen durchgeführte Arbeit danken.

wobei der Fehler der skizzierten Ergebnisse — innerhalb der Zeichengenauigkeit — ausschließlich von dem unvollkommenen Übergang zum finiten Gleichungssystem herrührt. Wegen Einzelheiten vgl. *Seggelke* [133]. Aus den Rechenergebnissen geht jedenfalls hervor, daß die einfache Rechtecksmittenregel eine ausreichende Genauigkeit im allgemeinen erst bei einer sehr großen Zahl von Randpunkten und mit unangemessen hohem Rechenaufwand liefert.

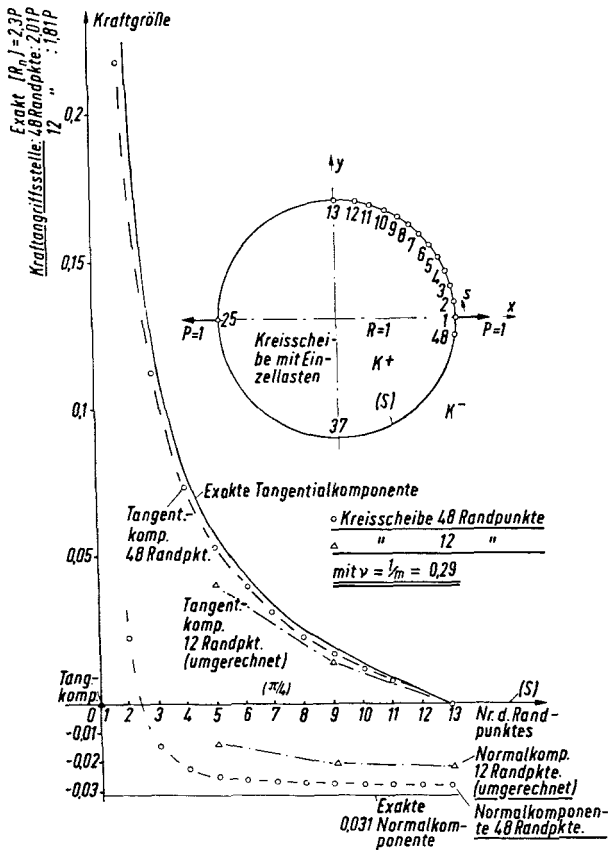


Abb. 4.4.4. Numerische Ergebnisse mit der Rechtecksmittenregel. Nach *Seggelke* [133]

Für die Verbesserung des finiten Gleichungssystems scheidet die Anwendung höherer Quadraturformeln auf das ganze Integrationsintervall ( $S$ ) von vornherein aus. Einmal würde dadurch die Anpassungsfähigkeit des Verfahrens an die verschiedensten Bereichsformen weitgehend verloren gehen und der Programmierungs- und Rechenaufwand für den zeitlich am meisten ins Gewicht fallenden Iterationsvorgang erheblich anwachsen. Sodann aber würden diese höheren Quadraturformeln wegen der Periodizität des Integranden nach *Kantorowitsch* und *Krylow* ([63], S. 97) selbst dann keine Genauigkeitsverbesserung bringen.

bringen, wenn der Integrand überall differenzierbar wäre. Eine weitere, von *Kantorowitsch* ([63], S. 98) angegebene Methode besteht in der Beseitigung der Singularität durch „Vergleich“ mit einem anderen, durch dieselbe Singularität ausgezeichneten Kern, für den man die benötigten Integrale exakt berechnen kann; in unserem Falle käme etwa der Kern (4.4.75)\*) für die Kreisscheibe nach *Seggelke* [133] in Frage. Doch ist diese Methode wohl nur auf glatte, einfach zusammenhängende Bereiche anwendbar und erschwert wiederum die Programmierung der Iteration. Auf die im ebenen Fall anwendbaren, funktionentheoretisch zu begründenden Methoden zur Regularisierung oder direkten numerischen Behandlung ähnlicher Integralgleichungen sei hier nur kurz hingewiesen [3, 5, 6, 37, 41, 42, 135]; sie gehen meist von einem anderen elastizitätstheoretischen Ansatz aus und dürften auch nicht ganz einfach zu programmieren sein, im Gegensatz zur analogen *Fredholmschen* Integralgleichung der Potentialtheorie [40, 41, 54–58]\*\*). Das in unserem Fall sinnvolle Verfahren besteht dagegen darin, beim Ersatz des Kernes (4.4.34) durch eine finite Matrix die Randkurve ( $S$ ) und die Belastungen  $[R_i]^n$  ein für allemal nach den gegebenen Stützwerten in geeigneter Weise zu interpolieren, an den Stützstellen den Hauptwert des Integrals zu bestimmen und mit der so gefundenen Ersatzmatrix wie üblich weiterzurechnen. Man nimmt also gewissermaßen die Integration der interpolierten Funktionen in den einzelnen Intervallen ein für allemal vorweg und setzt sie dann bei der Iteration mit Hilfe der jeweiligen Stützwerte zum Gesamtintegral zusammen. Für die Berechnung der Teilintegrale stehen nach *Collatz* [29], *Kantorowitsch* [63, 138], *Pychtejev* [139] u. a. geeignete Verfahren zur Verfügung.

Eine mögliche Interpolation der Randkurve besteht z. B. im Ersatz durch knickfrei in den Stützpunkten aneinander anschließende Kreisbogenstücke; dann kann zur Berechnung des Beitrags eines jeden Kreisbogenstücks zur Integralfunktion in seinen beiden Stützpunkten die Kernfunktion (4.4.75) zugrundegelegt werden. Für den Beitrag der anderen Kreisbogenstücke kann man dann numerische Quadraturformeln benutzen, insbesondere bei genügend großer Entfernung die einfache Rechtecksmittenregel\*\*\*). Der Nachteil dieser Interpolationsmethode ist, daß die Stützpunkte nicht beliebig gelegt werden können, was ihre Automatisierung sehr erschwert, wenn nicht praktisch überhaupt unmöglich macht. Anpassungsfähiger ist die aus der analytischen Geometrie bekannte Interpolation durch Parabelbögen [140] oder Stücke einer *Cornuschen* Spirale [141], welche durch die Lage der Stützpunkte und die zugehörigen Tangenten an ( $S$ ) eindeutig bestimmt sind. Zwar ist ein geschlossener Ausdruck für die Kernfunktion auf diesen Kurven bis jetzt nicht bekannt, doch kann man nach (4.4.55, 61, 68) den Grenzwert des Integranden in den Randpunkten ermitteln und dann mit Hilfe automatisch eingeschalteter

\*) Vgl. § 4.4.E, S. 261.

\*\*) Dagegen kann es in Verbindung mit einem Konvergenzverbesserungsverfahren nützlich sein, eine solche Regularisierung nachträglich, d. h. mit der bereits aufgestellten Ersatzmatrix, auszuführen. Vgl. dazu § 4.4.E und § 5.

\*\*\*) Nach *Seggelke* [133] etwa bei einem Abstand über fünf Intervalllängen mit einer Fehlerschranke unter 1%.

Zwischenpunkte die zur Bestimmung der Ersatzmatrix notwendigen Integrationen numerisch ausführen. Auch eine — ebenfalls im Prinzip auf automatischem Wege durchführbare — Interpolation durch zwei Kreisbögen zwischen zwei Stützpunkten mit Tangentenrichtungen ist möglich; hierbei kann über einen freien Parameter noch verfügt werden, z. B. durch geeignete Wahl der Tangentenrichtung in dem Zwischenstützpunkt, wo die beiden

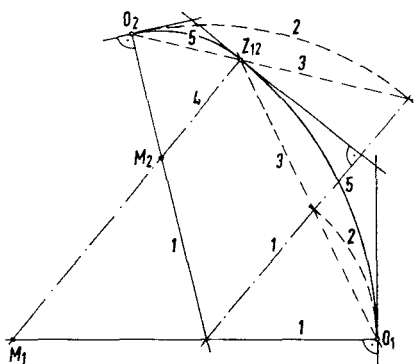
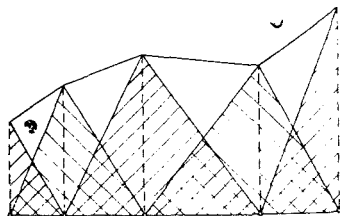


Abb. 4.4.5. Zur Interpolation der Randkurve durch zwei Kreisbögen. Gegeben sind die Stützpunkte  $O_1$ ,  $O_2$  mit Tangenten und die Tangentenrichtung im Zwischenstützpunkt  $Z_{12}$ .  $M_1$ ,  $M_2$  sind die Mittelpunkte der gesuchten Kreisbögen; die Reihenfolge der Konstruktion ist durch Bezifferung kenntlich gemacht

Kreisbögen aneinanderstoßen. Die elementargeometrische Konstruktion des Zwischenstützpunktes ist in Abb. 4.4.5 durchgeführt, und ihre Programmierung dürfte mit Hilfe einfacher Formeln der analytischen Geometrie nicht allzu schwierig sein.

Zur Interpolation der Belastung verwenden wir eine Trapezregel; d. h. wir ersetzen die Tangential- und Normalkomponenten der Belastung  $R_i^{y-1}$  durch stückweise lineare Funktionen der Bogenlänge  $s$  auf der Randkurve ( $S$ ) zwischen den einzelnen Stützpunkten. Dann lassen sich die Werte des Integrals in (4.4.35) in den Stützpunkten für diese stückweise lineare Ersatzfunktion beliebig genau angeben; die neue Belastung  $R_i^k$  kann man dann wieder in derselben Weise durch lineare Interpolation annähern und damit die Iteration weiterführen. Es besteht auch kein Zweifel, daß man auf diese Weise zu einer praktisch sinnvollen Fehlerabschätzung für das finite Ersatzgleichungssystem zu der Operatorgleichung (4.1.18) gelangen kann; wir ver-

Abb. 4.4.6. Zur Interpolation der Belastungsfunktion. Dreiecksbelastungen und Trapezregel über der rektifizierten Randkurve



zichten hier jedoch auf ihre Formulierung und Durchführung. Die lineare Interpolation der Belastung kann man bei der Aufstellung der finiten Ersatzmatrix für den Kern ein für allemal durchführen, indem man nach Abb. 4.4.6

jeden Stützwert als Maximalwert einer Dreiecksbelastung von dem gezeichneten Typ ansieht, jeweils getrennt für die Normal- und die Tangentialkomponente über der rektifizierten Bogenlänge von  $(S)$  aufgetragen. Die einzige Schwierigkeit ist dabei, daß im allgemeinen die Resultierenden der Tangential- und Normalbelastungen weder im Angriffspunkt noch in der Richtung mit dem Stützpunkt und seiner Tangente bzw. Normalen übereinstimmen und sich außerdem noch durch einen Umrechnungsfaktor von den Stützwerten unterscheiden; doch können diese Daten nach der Aufstellung der finiten Ersatzmatrix ausgedrückt und bei der numerischen Eingabe der gegebenen Belastung  $[P_i]$  berücksichtigt werden. Auch automatische Interpolationsprogramme sind denkbar, welche die gegebenen, als Resultierende in einem Randintervall aufgefaßten Belastungswerte durch geeignete Interpolation auf die beiden benachbarten Dreiecksbelastungen aufteilen und danach erst die Stützwerte berechnen, mit denen die weitere Rechnung durchgeführt wird. Die dadurch bedingte Veränderung der Ausgangswerte ist bei technischen Fragestellungen fast immer tragbar und liegt im Rahmen der üblichen Fehler numerischer Verfahren\*). Es ist kaum zu bezweifeln, daß sich auch die von *Seggelke* [133] entwickelten Methoden, Symmetrieeigenschaften der Kurve  $(S)$  zur Einsparung von Rechenzeit auszunützen, auf die verbesserte Rechnung übertragen lassen.

**4.4.E. Der Kern für die isotrope Kreisscheibe und seine Regularisierung. Ein unabhängiger Konvergenzbeweis für die isotrope Scheibe.**

Normalerweise wird man sich bei einer völlig beliebigen glatten Kurve  $(S)$  damit begnügen müssen, den Kern (4.4.34) in numerischer Form näherungsweise aufzustellen; nur in einfachen Sonderfällen kann man hoffen, einen für die praktische Rechnung genügend einfachen geschlossenen Ausdruck für die Kernfunktion zu finden. So hat *Seggelke* [133] die Kernfunktion (4.4.34) für die isotrope Kreisscheibe vom Radius  $a$  in Polarkoordinaten  $\varrho, \varphi$  ausgerechnet; die von ihm angegebenen Ausdrücke lauten

$$\begin{aligned}
 k_{\varrho\varrho}(\varphi, \varphi') &= \frac{1}{4\pi a} \left( -\frac{3\mathcal{M}-1}{2\mathcal{M}} \cos(\varphi' - \varphi) + \frac{1}{\mathcal{M}} \right) \\
 k_{\varphi\varphi}(\varphi, \varphi') &= -k_{\varphi\varphi}(\varphi, \varphi') = \frac{1}{4\pi a} \left( \frac{3\mathcal{M}-1}{2\mathcal{M}} \sin(\varphi' - \varphi) - \frac{\mathcal{M}-1}{2\mathcal{M}} \cotg \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right) \\
 k_{\varphi\varphi}(\varphi, \varphi') &= \frac{1}{4\pi a} \left( -\frac{3\mathcal{M}-1}{2\mathcal{M}} \cos(\varphi' - \varphi) - 1 \right) \quad (4.4.75)
 \end{aligned}$$

\*) Es sei noch bemerkt, daß man bei einem flächenhaften Integrationsgebiet, also bei räumlichen Randwertproblemen und ebenen Inhomogenitätsproblemen, eine entsprechende Interpolation durch eine Belegung mit sich überschneidenden, im allgemeinen sechsseitigen Pyramiden erreicht (vgl. die „Pyramidenfunktionen“ in [35]). Räumliche Inhomogenitätsprobleme lassen sich durch eine Kombination beider Interpolationsmethoden erfassen. Wegen allgemeiner Untersuchungen über mehrdimensionale Integrale mit Hauptwerten vgl. [122, 136, 137].

Singulär sind also nur die Komponenten außerhalb der Hauptdiagonale, was nach den Symmetrieeigenschaften des Spannungsfeldes einer Einzelkraft durchaus plausibel erscheint. Diese Komponenten erscheinen als Summe eines regulären und eines *Hilbertschen* Kerns; die tensorielle Kernfunktion muß sich also durch einen anderen Integraloperator mit *Hilbertschen* Kernen in den entsprechenden Tensorkomponenten verhältnismäßig einfach regularisieren lassen ([41], S. 122; [42, 135, 136]).

Einen Anhalt für die Wahl des regularisierenden Integraloperators geben die Überlegungen von § 4.3.C; dort wurde der durch seine Eigenwerte und Eigenfunktionen gegebene Operator  $\Pi^+ U^\circ$  mit Hilfe des Operators  $\Pi^- U^\circ$  regularisiert, d. h. vollstetig gemacht. Dasselbe muß auch mit den Integraldarstellungen (4.4.35–36) dieser Operatoren möglich sein. Bezeichnen wir mit  $\mathcal{K}$  den Integraloperator mit dem Kern  $k_{ij}(s, s')$  nach (4.4.34), so erhalten wir nach (4.4.35–36)

$$(\Pi^- U^\circ)(\Pi^+ U^\circ) = \left(\frac{1}{2}E - \mathcal{K}\right)\left(\frac{1}{2}E + \mathcal{K}\right) = \frac{1}{4}E - \mathcal{K}^2 \quad (4.4.76)$$

Der Kern des einmal iterierten Integraloperators  $\mathcal{K}^2$  ist im allgemeinen Fall in Matrizenform

$$\begin{aligned} k_{ij}^{(2)}(s, s') &= \oint_{(S)} k_{ik}(s, s'') k_{kj}(s'', s') ds'' \\ &\triangleq \oint_{(S)} \begin{pmatrix} k_{11}(s, s'') k_{11}(s'', s') + k_{12}(s, s'') k_{21}(s'', s') & k_{11}(s, s'') k_{12}(s'', s') \\ k_{21}(s, s'') k_{11}(s'', s') + k_{22}(s, s'') k_{21}(s'', s') & k_{21}(s, s'') k_{12}(s'', s') \\ + k_{12}(s, s'') k_{22}(s'', s') & \\ + k_{22}(s, s'') k_{22}(s'', s') \end{pmatrix} ds'' \quad (4.4.77) \end{aligned}$$

wobei den Indizes 1 und 2 außer den *Cartesischen* Koordinaten auch die Polarkoordinaten  $\varrho$  und  $\varphi$  entsprechen können. Nach der *Hilbertschen* Formel [41, 42, 135, 136]

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_0^{2\pi} \cotg \frac{\varphi'' - \varphi}{2} d\varphi'' \oint_0^{2\pi} \cotg \frac{\varphi' - \varphi''}{2} F(\varphi') d\varphi' \\ = -F(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi') d\varphi' \end{aligned} \quad (4.4.78)$$

muß der einmal nach (4.4.77) iterierte Kern (4.4.75) einen Anteil von der Form einer *Diracschen* Deltafunktion [88–91] enthalten; spaltet man diesen Anteil ab, so ist der verbleibende Kern  $k_{ij}^{<2>}(s, s')$  regulär.

Die etwas umständliche Regularisierung (4.4.76) in der Integraldarstellung ist

im Anhang ausgeführt; im Ergebnis erhält man den Produktoperator als Summe eines konstanten integralfreien Skalarfaktors

$$\gamma = \frac{(\mathcal{M} + 1)(3\mathcal{M} - 1)}{16\mathcal{M}^2} \quad (4.4.79)$$

und einer regulären Integraltransformation mit dem tensoriellen Kern

$$k_{e\varrho}^{<2>}(\varphi, \varphi') = \frac{1}{8\pi a} \left( \frac{(5\mathcal{M} - 3)(3\mathcal{M} - 1)}{4\mathcal{M}^2} \cos(\varphi' - \varphi) - \frac{(\mathcal{M} + 1)(\mathcal{M} - 3)}{4\mathcal{M}^2} \right)$$

$$k_{e\varphi}^{<2>}(\varphi, \varphi') = -k_{\varphi e}^{<2>}(\varphi, \varphi') = -\frac{1}{8\pi a} \frac{(5\mathcal{M} - 3)(3\mathcal{M} - 1)}{4\mathcal{M}^2} \sin(\varphi' - \varphi)$$

$$k_{\varphi\varphi}^{<2>}(\varphi, \varphi') = \frac{1}{8\pi a} \left( \frac{(5\mathcal{M} - 3)(3\mathcal{M} - 1)}{4\mathcal{M}^2} \cos(\varphi' - \varphi) - \frac{(3\mathcal{M} - 1)(\mathcal{M} + 1)}{4\mathcal{M}^2} \right) \quad (4.4.80)$$

Mit den Abkürzungen (4.3.60–62) erhält man dann die regularisierte Operatorgleichung (4.3.58–59) in der Integraldarstellung

$$\begin{aligned} & \frac{(\mathcal{M} + 1)(3\mathcal{M} - 1)}{16\mathcal{M}^2} \begin{pmatrix} R_e(\varphi) \\ R_\varphi(\varphi) \end{pmatrix} + \frac{(\mathcal{M} + 1)(\mathcal{M} - 3)}{16\mathcal{M}^2} \begin{pmatrix} \overline{R_e(\varphi)} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(3\mathcal{M} - 1)(\mathcal{M} + 1)}{16\mathcal{M}^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{R_\varphi(\varphi)} \end{pmatrix} \\ & + \frac{(5\mathcal{M} - 3)(3\mathcal{M} - 1)}{32\pi\mathcal{M}^2 a} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos(\varphi' - \varphi) & \sin(\varphi' - \varphi) \\ -\sin(\varphi' - \varphi) & -\cos(\varphi' - \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_e(\varphi') \\ R_\varphi(\varphi') \end{pmatrix} a \, d\varphi' = \begin{pmatrix} A_e(\varphi) \\ A_\varphi(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.81)$$

Die ersten beiden Glieder stimmen tatsächlich mit der linken Seite von (4.3.63) überein. Alle übrigen Glieder verschwinden aber, wenn wir den Zustandsraum  $S$  auf Gleichgewichts-Kräftebelegungen einschränken. In der Tat ist das dritte Glied der linken Seite bis auf den Vorfaktor nichts anderes als das durch  $2\pi a^2$  dividierte Moment der Kräftebelegung  $R$  bezüglich des Kreismittelpunkts; und bei dem vierten Glied zeigt eine elementare kräftegeometrische Überlegung, daß es sich bis auf den Vorfaktor und das Vorzeichen um die Resultierende der Kräftebelegung  $R$  handelt, zerlegt nach der Normal- und der Tangentialrichtung im Aufpunkt. Schließen wir also, wie üblich, alle Kräftebelegungen aus, die nicht die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, so stimmen (4.3.63) und (4.4.81) überein, wie zu erwarten war.

Grundsätzlich bleibt diese Regularisierungsmöglichkeit auch für eine beliebige, durchweg glatte und von Selbstberührungen freie Kurve ( $S$ ) bestehen. Denn sie hat zur Voraussetzung nur die Lage der beiden Häufungspunkte (4.3.31, 36)



in einem reinen Punktspektrum und die Integraldarstellungen (4.4.35–36) der beiden Operatoren  $\Pi^+ U^\circ$  und  $\Pi^- U^\circ$ . Die Möglichkeit der Integraldarstellung ist aber in (4.4.41–74) für beliebige glatte, stückweise analytische und selbstberührungsfreie Kurven nachgewiesen. Aus (4.4.73–74) entnimmt man ferner, daß die singulären Anteile der Integraltransformation im isotropen Fall nicht von der Gestalt der Kurve ( $S$ ) abhängen. Tatsächlich werden bei einer Verbiegung von ( $S$ ) — unter Wahrung der oben postulierten Eigenschaften — nur die regulären Anteile der Kernfunktion (4.4.34) verändert, und nur über den höchstens in endlich vielen Ausnahmepunkten unstetigen, aber durchweg beschränkten Beitrag (4.4.61) wirkt sich die Krümmung auf das Verhalten der Kernfunktion beim Zusammenrücken von Quellpunkt und Aufpunkt aus\*). Die einzigen möglichen Veränderungen der Kernfunktion bei einer derartigen Verbiegung von ( $S$ ) bestehen also in einer Vergrößerung oder Verkleinerung des Integrationsgebiets mit der Gesamtlänge von ( $S$ ), welche durch eine maßstäbliche Verkleinerung oder Vergrößerung leicht ausgeglichen werden kann, und außerdem der Addition eines beschränkten und stückweise stetigen Anteils zur Kernfunktion (4.4.34). Dies gilt auch noch, wenn man den Bereich ( $K^+$ ) durch Einführung weiterer geschlossener Randstücke mehrfach zusammenhängend macht. Denn wenn sich diese Randstücke nirgends berühren, sind ihre Wechselwirkungsglieder und deren Beiträge zur Kernfunktion ebenfalls beschränkt.

Führt man also den Kreis durch eine Verbiegung in irgend eine andere glatte Kurve ( $S$ ) über, so bleiben die singulären Anteile der Kernfunktion (4.4.75) unverändert; man kann setzen

$$\varphi' = \frac{s'}{2\pi L} \quad , \quad \varphi = \frac{s}{2\pi L} \quad , \quad a = \frac{L}{2\pi} \quad (4.4.82)$$

wo  $L$  die Gesamtlänge von ( $S$ ) ist, und dann die Regularisierung in der beschriebenen Weise mit Hilfe der *Hilbertschen* Formel (4.4.78) durchführen. Ist dann die Kurve ( $S$ ) nicht nur glatt, sondern auch stetig gekrümmt, so kann sich die Kernfunktion (4.4.75) nur um einen stetigen Summanden verändert haben; die singulären Anteile und der dadurch bestimmte integralfreie Faktor  $\gamma$  in (4.4.79) bleibt also unverändert. An die Stelle von (4.4.80) tritt eine andere beschränkte Kernfunktion  $k_{ij}^{<2>}(s, s')$ ; die dadurch bestimmte Integraltransformation  $W$  (vgl. (4.3.56)) ist also vollstetig. Springt dagegen die Krümmung an endlich vielen Ausnahmestellen, so weist nach (4.4.61) die gegen (4.4.75) abgeänderte Kernfunktion  $k_{ij}(s, s')$  eine endliche Anzahl beschränkter Sprünge auf; damit erscheinen im regulären Teil  $k_{ij}^{<2>}(s, s')$  des iterierten Kerns  $k_{ij}^{(2)}(s, s')$  endlich viele logarithmische, also schwache Singularitäten.  $k_{ij}^{<2>}(s, s')$  ist also, wenn schon nicht mehr beschränkt, so doch immer noch quadratisch integrierbar und führt damit ebenfalls auf eine vollstetige Integraltransformation  $W$ . Mit den singulären Anteilen bleibt wiederum der integralfreie Faktor  $\gamma$  unverändert.

Mehrfach zusammenhängende Bereiche ( $K^+$ ) ersetzt man zunächst durch topologisch gleiche, von Kreisen berandete Bereiche. Dann läßt sich die

\*) Zwar entspricht auch (4.4.55) nicht einer regulären Integraltransformation, da darin die Ableitung  $P_1$  erscheint. Aber die Krümmung tritt darin nicht auf.

Regularisierung (4.4.76–80) zunächst für jede Teilrandkurve einzeln ausführen; damit erhält man wieder den integralfreien Faktor  $\gamma$  nach (4.4.79). Die hinzutretenden Wechselwirkungsglieder zwischen den einzelnen Kreisen liefern nur einen beschränkten Beitrag zur regularisierten Kernfunktion  $k_{ij}^{<2>}(s, s')$ ; die dadurch vermittelte Integraltransformation  $W$  ist also vollstetig. Andere mehrfach zusammenhängende Bereichsformen stellt man nun durch Verbiegen der einzelnen Kreise her; man setzt für das  $\nu$ -te geschlossene Teilstück von  $(S)$

$$\varphi'_\nu = \frac{s'_\nu}{2\pi L_\nu} \quad , \quad \varphi_\nu = \frac{s_\nu}{2\pi L_\nu} \quad , \quad a_\nu = \frac{L_\nu}{2\pi} \quad (4.4.83)$$

wo  $L$  die Länge des  $\nu$ -ten Teilstücks von  $(S)$  ist. Im übrigen gelten wieder die obigen Überlegungen, nach denen der integralfreie Faktor  $\gamma$  unverändert bleibt, der Kern  $k_{ij}^{<2>}(s, s')$  nur schwach singular sein kann und also die Transformation  $W$  vollstetig ist.

Die Transformation  $W$  ist außerdem mit  $U^\circ$  symmetrisierbar. Denn einerseits ist nach (4.3.56)

$$(\Pi^- U^\circ)(\Pi^+ U^\circ) = \left(\frac{1}{2}E - \mathcal{K}\right)\left(\frac{1}{2}E + \mathcal{K}\right) = \frac{1}{4}E - \mathcal{K}^2 = \gamma E + W \quad (4.4.84)$$

andererseits nach (4.1.23)

$$U^\circ(\Pi^- U^\circ)(\Pi^+ U^\circ) = U^\circ(E - \Pi^+ U^\circ)(\Pi^+ U^\circ) = U^\circ \Pi^+ U^\circ - U^\circ \Pi^+ U^\circ \Pi^+ U^\circ \quad (4.4.85)$$

Da sich nun  $U^\circ$  nach (4.4.8) ebenfalls auf eine Integraltransformation mit schwach singulärem Kern zurückführen läßt, also vollstetig ist, und da dieser Operator nach den Voraussetzungen von § 4.1 positiv definit ist und keine Nulllösungen hat, treffen die Voraussetzungen von Satz 63 bei *Schmeidler* ([40], S. 317) zu. Die Integraltransformation  $W$  besitzt also ein vollständiges System von Eigenfunktionen in dem zu der betrachteten Kurve  $(S)$  gehörigen Zustandsraum  $S$ , und ihre Eigenwerte haben nur den einzigen Häufungspunkt Null. Dies zeigt aber, daß die Häufungspunkte  $\alpha$  und  $1 - \alpha$  der Eigenwerte der Operatoren  $\Pi^- U^\circ$  und  $\Pi^+ U^\circ$  für eine beliebige glatte und stückweise analytische Kurve  $(S)$  ohne Selbstberührungen sich stets nach (4.3.35) aus derselben Zahl  $\gamma$  bestimmen lassen, also mit den Häufungspunkten (4.3.31, 36) der Eigenwerte für den Einheitskreis zusammenfallen.

Der Konvergenzbeweis für das Iterationsverfahren (4.1.21) ist daraus nun leicht abzuleiten. Für praktisch vorkommende Werte von  $\mathcal{K}$  liegen die Häufungsstellen der Eigenwerte von  $\Pi^- U^\circ$  stets unterhalb Eins; der Eigenwert Eins selbst ist nach § 4.1 mit den verbotenen Anteilen, also den Nicht-Gleichgewichts-Kräftebelegungen, für  $\Pi^- U^\circ$  ausgeschlossen worden. Außerhalb einer gewissen Umgebung der Häufungsstellen können also nur endlich viele Eigenwerte liegen; somit muß eine gewisse endliche Umgebung von Eins von Eigenwerten frei sein. Da sie andererseits nach (4.2.34) auch nicht größer

als Eins werden können, muß es einen größten Eigenwert von  $\Pi^- U^\circ$  unterhalb Eins geben. Daraus folgt mit § 2.6 die starke Konvergenz (K. im Mittel; vgl. § 2.3, S. 131) des Iterationsverfahrens (4.1.21) im Zustandsraum  $S^*$ ).

Gleichzeitig mit dem Konvergenzbeweis haben wir auch die beiden Häufungspunkte der Eigenwerte von  $\Pi^- U^\circ$  und  $\Pi^+ U^\circ$  für beliebige glatt berandete isotrope Scheiben bestimmt und ein Regularisierungsverfahren für diese beiden Operatoren angegeben. Die Überlegungen von § 4.4.D zur numerischen Behandlung einer singulären Integraltransformation werden dadurch aber keineswegs überflüssig. Denn selbst wenn es gelänge, den regulären Kern  $k_{ij}^{<2>}(s, s')$  direkt, d. h. ohne vorhergehende Bestimmung des singulären Kerns  $k_{ij}(s, s')$ , numerisch aufzustellen, so würde man doch die singuläre Integraldarstellung (4.4.35) von  $\Pi^- U^\circ$  immer noch zur Berechnung der Vektorfunktion

$$A = (\Pi^- U^\circ) [P] \quad (4.4.86)$$

(vgl. (4.3.60)) benötigen. Eine praktische Nutzenanwendung der Regularisierung dürfte eher bei der Konvergenzbeschleunigung in Verbindung mit der Momentenmethode zu suchen sein (§ 5).

Eine andere Methode, zu einer *Fredholmschen* Integralgleichung zu gelangen, scheint zunächst in der Variation der Querkontraktionszahl  $\mathcal{M}$  zu bestehen. Denn bekanntlich ist die Lösung der zweiten Randwertaufgabe für eine isotrope Scheibe in den Spannungen von der Querkontraktionszahl  $\mathcal{M}$  unabhängig für einfach zusammenhängende Bereiche, und unter gewissen Einschränkungen sogar für mehrfach zusammenhängende Scheiben. Man sieht aber sofort, daß die singulären Glieder in (4.4.75) für  $\mathcal{M} = 1$  verschwinden, und aus (4.3.31, 36), daß dann die beiden Häufungsstellen der Eigenwerte zusammenfallen. Dies entspricht dem *Miche-Weinelschen* Verfahren für die zweite Randwertaufgabe [49]. Doch zeigt eine nähere Betrachtung, daß für  $\mathcal{M} = 1$  die Voraussetzung (4.2.15) einer eigentlich positiv definiten elastischen Energiedichte nicht mehr erfüllt ist; der Zustandsraum  $S$  ist dann kein *Hilbert*-Raum mehr, womit eine wesentliche Voraussetzung für unsere bisherigen Überlegungen entfällt. Tatsächlich hat man für  $\mathcal{M} = 1$  den Fall der „ebenen Inkompressibilität“ [143]. Wir werden uns in der nächsten Ziffer mit diesem Fall besonders beschäftigen und zeigen, daß das *Miche-Weinelsche* Verfahren trotzdem brauchbar ist für die zweite Randwertaufgabe an einfach zusammenhängenden isotropen Scheiben.

#### 4.5 Das Iterationsverfahren von *Miche* und *Weinel*

Bereits 1926 hat *Miche* ein Iterationsverfahren zur Lösung von Scheiben- und Plattenproblemen vorgeschlagen, das im Prinzip den Iterationsverfahren von

\*) Für beschränktes und stetiges  $[P]$  ist auch  $[R]$  beschränkt und stetig. Denn es könnte die Operatorgleichung

$$(\Pi^+ U^\circ) [R] = \frac{1}{2} [R] + \mathcal{K} [R] = [P] \quad (4.4.85a)$$

bei beschränktem  $[P]$  von einem nicht beschränkten  $[R]$  nur dann erfüllt werden, wenn bei Annäherung an eine Unendlichkeitsstelle  $f_0(0, 0)$  in (4.5.55) gegen  $-\frac{1}{2}$  streben würde.

Dies kann aber nach (4.4.45-46) und (4.4.13) ausgeschlossen werden. Auf ähnliche Art läßt sich auch die Stetigkeit nachweisen.

§ 1 sehr ähnlich ist. Dieses Verfahren wurde 1931 von *Weinel* [49] weiter ausgearbeitet und gegen eine Kritik von *Némenyi* verteidigt. Wir beschränken uns an dieser Stelle darauf, die Lösung der zweiten Randwertaufgabe an der isotropen, einfach zusammenhängenden und endlichen Scheibe zu untersuchen.

Das Verfahren von *Miche* und *Weinel* unterscheidet sich von dem in § 4.4 entwickelten Integralgleichungsverfahren nur in einem Punkt: statt des Spannungsfeldes einer Einzelkraft in einer Vollebene aus einem physikalisch realisierbaren Material wird bei der Konstruktion des Kernes  $k_{ij}(s, s')$  nach (4.4.34) das Spannungsfeld der Einzelkraft an einer Halbebene [4] zugrundegelegt. Dieses Spannungsfeld läßt sich aber bei Fortsetzung in die Vollebene auch auffassen als das Spannungsfeld einer Einzelkraft in der vollen unendlichen Scheibe aus einem Material mit der Querkontraktionszahl  $\mathcal{M} = 1$  ([4], § 23). Die Vorteile dieser Wahl von  $\mathcal{M}$  sind offensichtlich: Die beiden Häufungspunkte der Eigenwerte (4.3.36, 41) fallen in einen zusammen; in dem Kern (4.4.75) verschwinden die singulären Anteile und damit auch in jedem anderen Kern  $k_{ij}(s, s')$  für eine glatt berandete, isotrope Scheibe. Man kann also das Problem, wie dies bereits *Miche* und *Weinel* getan haben, auf eine *Fredholmsche* Integralgleichung zweiter Art [40, 41] zurückführen. Bekanntlich ist die *Airy'sche* Spannungsfunktion und damit das Spannungsfeld bei der zweiten Randwertaufgabe an der einfach zusammenhängenden Scheibe von der Querkontraktionszahl  $\mathcal{M}$  unabhängig, sofern nur ihre Eindeutigkeit gewährleistet werden kann [4]; die Lösung der Integralgleichung von *Miche* und *Weinel* muß also auch, wenn sie eindeutig ist, auf das gesuchte Spannungsfeld führen.

Eine andere Frage ist es, ob in diesem Falle auch die Konvergenz des Iterationsverfahrens gesichert ist. Für ein physikalisch realisierbares, isotropes Material gilt bekanntlich stets  $\mathcal{M} > 2$ ; andernfalls wäre, entgegen den üblichen und auch in dieser Arbeit zugrundegelegten Voraussetzungen, die elastische Energiedichte nicht mehr eigentlich positiv definit. Für  $\mathcal{M} = 2$  wird das Material inkompressibel und für  $\mathcal{M} < 2$  instabil. Damit ist der Zustandsraum, wenigstens für beliebige räumliche Spannungszustände, kein *Hilbert-Raum* mehr, und es entfallen sowohl die Voraussetzungen unserer Konvergenzbeweise als auch des *Kirchhoffschen* Eindeutigkeitsbeweises [1, 2, 78].

Für den ebenen Spannungszustand läßt sich diese Bedingung allerdings erheblich abmildern; schreiben wir das *Hookesche* Gesetz des ebenen Spannungszustandes [4] in die *Voigtsche* Matrizenform von § 3.8 um, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\mathcal{M}} & 0 \\ -\frac{1}{\mathcal{M}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\mathcal{M}+1}{\mathcal{M}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.5.1)$$

Man erkennt, daß die Matrix der Elastizitätskoeffizienten für positive Querkontraktionszahl  $\mathcal{M}$  und positiven Elastizitätsmodul  $E$  ebenfalls positiv sein

muß, wenn nur die linke obere Hauptachsendeterminante 2. Ordnung positiv ist, d. h. also für

$$1 - \frac{1}{\mathcal{M}^2} > 0 \quad (4.5.2)$$

oder

$$\mathcal{M} > 1 \quad (4.5.3)$$

Die elastische Energiedichte kann also bei Einschränkung auf ebene Spannungszustände immer noch eigentlich positiv definit sein, auch wenn es schon räumliche Spannungszustände gibt, gegenüber denen sich das Material instabil verhält.

Wir betrachten nun den Fall  $\mathcal{M} = 1$ . Dann hat die Matrix in (4.5.1) die drei Eigenwerte 0, 2 und 4. Soll also der Zustandsraum  $S$  auch in diesem Fall ein Hilbert-Raum bleiben, so müssen alle elastischen Zustände des Grundkörpers  $K^\circ$  ausgeschlossen werden, bei denen an irgendeiner Stelle eine Spannung vorkommt, welche dem Eigenwert Null der Matrix der Elastizitätskoeffizienten entspricht. Ausnahmen sind höchstens für eine Punktmenge vom Maß Null zulässig. Nun prüft man leicht nach, daß zu dem Eigenwert Null die folgenden Spannungen und Dehnungen gehören

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} \text{ beliebig, } \sigma_{xy} = 0 \quad (4.5.4)$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0 \quad (4.5.5)$$

Der Fall  $\mathcal{M} = 1$  entspricht also der „ebenen Inkompressibilität“; ein „ebener hydrostatischer Spannungszustand“ bringt keine Dehnung hervor [143]. Freilich verschwindet  $\varepsilon_{zz}$  unter der Einwirkung der Spannung (4.5.4) keineswegs; man erhält

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{2}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (4.5.6)$$

also ein physikalisch unsinniges Ergebnis. Dies ist aber in unserem Fall ohne Belang, da die Spannungskomponente  $\sigma_{zz}$  für den ebenen Spannungszustand verschwindet.

Genau diese ebenen hydrostatischen Spannungszustände werden nun auch vom Kirchhoffschen Eindeutigkeitsbeweis nicht erfaßt. Aber man kann ihre Eindeutigkeit für die zweite Randwertaufgabe unmittelbar aus der Differentialgleichung herleiten, und zwar auch für den Grundkörper  $K^\circ$ , wenn man nur voraussetzt, daß alle Spannungen im Unendlichen verschwinden. Denn ist  $F$  die Airysche Spannungsfunktion, so folgt aus der zweiten Gleichung (4.5.4)

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.5.7)$$

also

$$F = X(x) + Y(y) \quad (4.5.8)$$

und daraus

$$\sigma_{xx} = Y''(y), \quad \sigma_{yy} = X''(x) \quad (4.5.9)$$

Dies ist aber mit der ersten Gleichung (4.5.4) nur verträglich, wenn

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = c \quad (4.5.10)$$

und  $c$  eine Konstante ist. Da nun gemäß unseren Voraussetzungen nur auf der Kurve  $(S)$  in  $K^\circ$  Kräfte angreifen und die Spannungen im Unendlichen verschwinden sollen, erhält man für eine beliebige einfach zusammenhängende Scheibe  $K^+$  die dem Eigenwert Null des Operators  $\Pi - U^\circ$  entsprechende Kräftebelegung in der Form

$$\overset{(0)}{R} \triangleq \overset{(0)}{R}_n = c, \quad \overset{(0)}{R}_t = 0 \quad (4.5.11)$$

wo  $R_n$  die Normalkomponente und  $R_t$  die Tangentialkomponente der Kräftebelegung ist. Das Spannungsfeld findet man zu

$$\begin{aligned} \overset{(0)}{\sigma}_{xx} &= \overset{(0)}{\sigma}_{yy} = \overset{(0)}{R}_n, & \overset{(0)}{\sigma}_{xy} &= 0 & \text{in } (K^+) \\ \overset{(0)}{\sigma}_{xx} &= \overset{(0)}{\sigma}_{yy} = \overset{(0)}{\sigma}_{xy} = 0 & & \text{in } (K^-) \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Demnach gilt

$$\overset{(0)}{P} = (\Pi + U^\circ) \overset{(0)}{R} = \overset{(0)}{R}, \quad \overset{(0)}{Q} = (\Pi - U^\circ) \overset{(0)}{R} = 0 \quad (4.5.13)$$

Die dem Eigenwert Null entsprechenden Anteile verschwinden also nach dem ersten Schritt des Iterationsverfahrens aus den Reihengliedern  $R^n$ . Für alle übrigen Anteile der Kräftebelegung aber bleiben die Eindeutigkeits- und Konvergenzsätze bestehen.

Man hat nur darauf zu achten, daß die Anteile der Form (4.5.12) im Laufe des Iterationsverfahrens nicht durch Rundungsfehler verändert werden. Denn da für  $\mathcal{M} = 1$  die elastische Energie der Kräftebelegungen (4.5.13) im Grundkörper  $K^\circ$  verschwindet, sind diese elastischen Zustände „Nullelemente“ des Zustandsraums  $S$ ; ihre Norm verschwindet und sie werden weder vom Konvergenzbeweis noch von den in § 5 zu besprechenden Konvergenzverbesserungsverfahren erfaßt; diese können im Gegenteil mit Kräftebelegungen der Form (4.5.13) ein völlig falsches Ergebnis liefern. Da sich jedoch  $\Pi - U^\circ$  im Falle  $\mathcal{M} = 1$  auf die Summe einer Multiplikation mit der Konstanten 0,5 und eines vollstetigen Operators zurückführen läßt, muß dieser Operator ein reines Punktspektrum besitzen. (4.5.13) stellt dann die zu allen übrigen Eigenfunktionen im Zustandsraum  $S$  orthogonale Eigenfunktion zum Eigenwert Null dar. Sie kann also beim Iterationsprozeß höchstens durch Rundungsfehler neu auftreten.

Daraus ergibt sich folgendes Verfahren. Man trennt zunächst von der gegebenen Belastung  $[P]$  alle Anteile der Form (4.5.13) ab durch Einführung der neuen Belastung

$$[\hat{P}] \triangleq \hat{P}_n(s) = P_n(s) - \overline{P_n(s)}, \quad \hat{P}_t(s) = P_t(s) \quad (4.5.14)$$

wo die Überstreichung das arithmetische Mittel über die Kurve  $(S)$  kennzeichnet. Führt man nun das Iterationsverfahren mit der Kräftebelegung  $[\hat{P}]$  durch, so muß

der Mittelwert der Normalkomponente bei sämtlichen während des Verfahrens auftretenden Kräftebelegungen  $[R]^n$  verschwinden; auf diese Weise kann man die Rundungsfehler unter Kontrolle halten. Die Lösung für den abgespaltenen Teil  $[P] - [\hat{P}]$  ist aber trivial und kann nachträglich hinzugefügt werden.

#### 4.6 Anwendung auf andere ebene Randwertprobleme

Wir geben in dieser Ziffer einige kurze Hinweise zur Übertragung der Überlegungen dieses Paragraphen auf die in § 1.3 behandelten Randwertprobleme. Auf zwei Erweiterungsmöglichkeiten haben wir bereits hingewiesen, nämlich die Übertragung auf die zweite Randwertaufgabe des ebenen Verzerrungszustandes und auf die erste Randwertaufgabe bei der dünnen Platte innerhalb der *Kirchhoffschen* Näherung. In beiden Fällen bleibt der hier entwickelte Formelapparat unverändert erhalten; nur die Konstanten nehmen andere Werte an. Bei der ersten Randwertaufgabe an der Platte wechselt außerdem die physikalische Deutung; wir haben bereits in § 1.3, (1.3.11–14) gesehen,

daß an die Stelle der Kräftebelegungen  $R$  nunmehr Belegungen  $\tilde{R}$  mit *Volterra*-schen Distorsionszuständen 2. Art auf  $(S)$  in  $K^\circ$  treten. Die Deutung der zugehörigen Funktionen  $\tilde{w}$  ergibt sich sofort aus der *Schaefer*schen Analogie [59–61]; es ist der *Schaefer*sche Spannungsfunktionsvektor auf  $(S)$  in  $K^\circ$ .

Etwas weitergehende Umformungen sind für die erste Randwertaufgabe an der dünnen Scheibe notwendig. Nach (1.3.1–10) treten an die Stelle der Kräftebelegungen  $R$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  in diesem Fall Stufenversetzungsbelegungen  $\tilde{R}$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$ ; die Vektorfunktion  $\tilde{R}$  entspricht einer auf die Längeneinheit der Kurve  $(S)$  bezogenen *Burgers*-Vektordichte, d. h. man erhält durch Integration von  $\tilde{R}$  über ein von einem *Burgers*-Umlauf [27, 28, 52] eingeschlossenes Teilstück der Kurve  $(S)$  den zugehörigen *Burgers*-Vektor.

Wir überlegen zunächst, wie die zu  $\tilde{R}$  gehörige Funktion  $\tilde{w}$  zu bestimmen ist, welche nun an die Stelle der Verschiebung  $w$  tritt. Von dieser Vektorfunktion  $\tilde{w}$  müssen wir verlangen, daß die Bildung der Skalarprodukte  $\{\tilde{w}, \tilde{R}\}$ ,  $\{\tilde{w}, \tilde{P}\}$  und  $\{\tilde{w}, \tilde{Q}\}$  entsprechend (4.2.1–10, 20–22) jeweils die doppelte elastische Energie des Grundkörpers  $K^\circ$  bzw. seiner Teilbereiche  $(K^+)$  und  $(K^-)$  unter der Einwirkung der Versetzungsbelegung  $\tilde{R}$  auf  $(S)$  ergibt, und wir müssen von ihr außerdem noch Stetigkeit auf  $(S)$  in  $K^\circ$  fordern, d. h. ihr Wert muß für die beiden Ufer  $S^+$  und  $S^-$  gleich sein. Wir finden diese Vektorfunktion, indem wir die doppelte elastische Energie des Teilbereichs  $K^+$  auf ein Randintegral über  $(S)$  zurückführen. Sei also  $\tilde{F} = F(x, y)$  die *Airy*sche Spannungsfunktion des von der Versetzungsbelegung  $\tilde{R}$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  hervorgerufenen Spannungsfeldes, und  $\mathbf{a}(x, y)$  das zugehörige Verschiebungsfeld im Teilbereich  $(K^-)$ . Dann erhält man für die doppelte, durch die Scheibendicke  $h$  dividierte elastische Energie im Teilbereich  $(K^+)$  nach dem Satz von *Stokes*

$$\begin{aligned} \int_{(K^+)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, df &= - \int_{(K^+)} (\nabla \times \mathbf{f} \mathbf{f} \times \nabla F) \cdot \nabla \mathbf{a} \, df \\ &= - \int_{(K^+)} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f} \mathbf{f} \times \nabla F) \cdot \mathbf{a} \, df = - \int_{(K^+)} (\nabla \times \nabla) \cdot d\mathbf{f} (\mathbf{f} \times \nabla F) \cdot \mathbf{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{(K^-)} d\mathbf{f} \cdot \overbrace{(\nabla \times \nabla) \mathbf{a}}^{\downarrow} \cdot \underbrace{(\mathbf{f} \times \nabla F)}_{\uparrow} + \int_{(K^+)} d\mathbf{f} \cdot \overbrace{(\nabla \times \nabla) \mathbf{a}}^{\downarrow} \cdot \underbrace{(\mathbf{f} \times \nabla F)}_{\uparrow} \\
&= + \oint_{(S)} (d\mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{f} \times \nabla F) \quad (4.6.1)
\end{aligned}$$

Nun ist aber nach (1.3.6)

$$\tilde{P} \triangleq \frac{\partial a_i}{\partial s} \triangleq i \frac{\partial a_x}{\partial s} + j \frac{\partial a_y}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = \mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \cdot \nabla \mathbf{a} \quad (4.6.2)$$

Somit haben wir zu setzen

$$\tilde{w} \triangleq \mathbf{f} \times \nabla F = -n \frac{\partial F}{\partial s} + \mathbf{t} \frac{\partial F}{\partial n} \quad (4.6.3)$$

Die Funktion  $\tilde{w}$  ist also der um  $90^\circ$  gedrehte Gradient der *Airy*schen Spannungsfunktion. Eine entsprechende Beziehung erhält man — unter Beachtung des Vorzeichens und des Umlaufsinnnes von  $(S)$ , bei dem das Außengebiet  $(K^-)$  zur Rechten liegt — für die doppelte elastische Energie des Außengebiets  $(K^-)$ . Die Stetigkeit des Gradienten von  $F$  auf  $(S)$  folgt schließlich aus der Gleichgewichtsbedingung auf  $(S)$ , wo ja bei dem betrachteten reinen Eigen Spannungszustand keine Kräfte angreifen, durch Vergleich der rechten Seite von (4.6.3) mit den bekannten statischen Randbedingungen der *Airy*schen Spannungsfunktion [1–6].

Die Frage nach den Eigenfunktionen des Operators, der die Versetzungsbelegungen  $\tilde{Q}$  aus den Versetzungsbelegungen  $\tilde{R}$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  erzeugt und den wir mit  $\tilde{\Pi} - \tilde{U}^\circ$  bezeichnen, ist für die Kreisscheibe im Anschluß an § 4.3 rasch zu erledigen. Eine Eigenfunktion des Operators  $\tilde{\Pi} - \tilde{U}^\circ$  liegt offenbar dann vor, wenn entsprechend der Gleichgewichtsbedingung die Kräftebelegungen an den beiden Ufern  $S^+$  und  $S^-$  von  $(S)$  nach einem Schnitt in  $(S)$  entgegengesetzt gleich sind, und wenn sich die Verschiebungen beider Ufer beim Entspannen des zerschnittenen Körpers nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Anders ausgedrückt: bei Wahrung der Gleichgewichtsbedingung auf  $(S)$  müssen die Anteile  $\tilde{P}$  und  $\tilde{Q}$  der Versetzungsbelegung  $\tilde{R}$ , welche — in der Ausdrucksweise (1.3.9–10) — auf das innere und das äußere Ufer entfallen, durch Multiplikation mit konstanten Faktoren  $\tilde{\alpha}$  und  $\tilde{\mu} = 1 - \tilde{\alpha}$  aus  $\tilde{R}$  hervorgehen. Dies ist ein Gegenstück zu der Eigenwertaufgabe von § 4.3, bei der die Verschiebungen beider Ufer entsprechend der Kompatibilitätsbedingung gleich sind, während die Kräftebelegungen sich um einen konstanten Faktor unterscheiden. In beiden Fällen aber werden Gleichgewichts- und Kompatibilitätsbedingung sowohl im Innern von  $(K^+)$  wie von  $(K^-)$  erfüllt.

Wir schließen daraus, daß sich die Eigenfunktionen von  $\tilde{\Pi} - \tilde{U}^\circ$  aus denselben Lösungen im Innengebiet  $(K^+)$  und im Außengebiet  $(K^-)$  zusammensetzen lassen; nur sind sie jeweils mit einem anderen Faktor zu multiplizieren.

Bei der Kreisscheibe sind sogar die Eigenwerte — mit Ausnahme der nullten, (4.3.41–44) entsprechenden Eigenfunktion — dieselben wie beim Operator  $\Pi - U^\circ$ ; es werden lediglich die erste mit der dritten und die zweite mit der vierten



Gruppe der Eigenfunktionen vertauscht. Wir zeigen dies am Beispiel der ersten Gruppe; dort gilt für den Eigenwert  $\mu_1$  des Operators  $\Pi^- \bar{U}^\circ$  nach (4.3.31)

$$\mu_1 = \frac{3\mathcal{M} - 1}{4\mathcal{M}} \quad ; \quad \kappa_1 = 1 - \mu_1 = \frac{\mathcal{M} + 1}{4\mathcal{M}} \quad (4.6.4)$$

Eine Gruppe nicht normierter Eigenfunktionen von  $\tilde{\Pi}^- \bar{U}^\circ$  erhalten wir daraus, indem wir  ${}^{(1,\gamma)}\mathfrak{P}$  mit  $\mu_1$  und  ${}^{(1,\gamma)}\mathfrak{Q}$  mit  $-\kappa_1$  multiplizieren (vgl. (4.3.32)); dann werden die Kräftebelegungen am inneren und am äußeren Ufer von  $(S)$  entgegengesetzt gleich, wie es die Gleichgewichtsbedingung verlangt. Wir erhalten ferner die Verschiebung  ${}^{(1,\gamma)}\mathfrak{a}$  des inneren Ufers  $S^+$  und die Verschiebung  ${}^{(1,\gamma)}\mathfrak{b}$  des äußeren Ufers  $S^-$  von  $(S)$  aus  ${}^{(1,\gamma)}\mathfrak{w}$  nach (4.3.32) durch

$${}^{(1,\gamma)}\mathfrak{a} = \mu_1 {}^{(1,\gamma)}\mathfrak{w} \quad ; \quad {}^{(1,\gamma)}\mathfrak{b} = -\kappa_1 {}^{(1,\gamma)}\mathfrak{w} \quad (4.6.5)$$

Der neue Eigenwert  $\tilde{\mu}_1$  des Operators  $\tilde{\Pi}^- \bar{U}^\circ$  ergibt sich nun als das Verhältnis des auf das Außengebiet ( $K^-$ ) entfallenden Energieanteils zur gesamten elastischen Energie in  $K^\circ$ ; man erhält somit, da die neuen Kräftebelegungen entgegengesetzt gleich sind, für die erste und zweite Gruppe der Eigenwerte des Operators  $\tilde{\Pi}^- \bar{U}^\circ$  den neuen Eigenwert  $\tilde{\mu}_1$  aus

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{\kappa_1}{\mu_1 + \kappa_1} = \kappa_1 = \frac{\mathcal{M} + 1}{4\mathcal{M}} \quad ; \quad \tilde{\kappa}_1 = 1 - \mu_1 = \mu_1 = \frac{3\mathcal{M} - 1}{4\mathcal{M}} \quad (4.6.6)$$

Auf dieselbe Weise erhält man für die dritte und vierte Gruppe

$$\tilde{\mu}_3 = \kappa_3 = \frac{3\mathcal{M} - 1}{4\mathcal{M}} \quad ; \quad \tilde{\kappa}_3 = 1 - \tilde{\mu}_3 = \mu_3 = \frac{\mathcal{M} + 1}{4\mathcal{M}} \quad (4.6.7)$$

und schließlich für die nullte Gruppe

$$\tilde{\mu}_0 = \kappa_0 = \frac{\mathcal{M} + 1}{2\mathcal{M}} \quad ; \quad \tilde{\kappa}_0 = 1 - \tilde{\mu}_0 = \mu_0 = \frac{\mathcal{M} - 1}{2\mathcal{M}} \quad (4.6.8)$$

Es ist offensichtlich, daß man dieselbe Schlußweise auch auf eine beliebig geformte Scheibe übertragen kann; daraus folgt, daß der Operator  $\tilde{\Pi}^- \bar{U}^\circ$  unter denselben Voraussetzungen ein reines Punktspektrum besitzt wie der Operator  $\Pi^- U^\circ$  für dieselbe Scheibe und daß sein Spektrum mit dem des Operators  $\Pi^+ U^\circ$  übereinstimmt. Die verbotenen Anteile der Versetzungsbelegungen  $\tilde{R}$  entsprechen offenbar *Volterraschen* Distorsionszuständen des Außengebiets ( $K^-$ ), bei denen das Innengebiet ( $K^+$ ) spannungsfrei bleibt.

Bei der zu § 4.4 analogen Darstellung des Operators  $\tilde{\Pi}^- \bar{U}^\circ$  als Integraltransformation hat man an Stelle des Spannungsfeldes der Einzelkraft das Spannungs- und Verschiebungsfeld einer Stufenversetzung zugrunde zu legen; für den ebenen Verzerrungszustand sind die benötigten Gleichungen z. B. in ([27], § 17) und [52] angegeben. Die Formeln für den ebenen Spannungs-

zustand erhält man daraus nach (4.3.29). Bekanntlich springt das Verschiebungsfeld einer Versetzung bei jedem Umlauf um die Versetzung (*Burgers-Umlauf*) um den *Burgers*-Vektor; die in (1.3.7) benötigten Ableitungen sind jedoch eindeutig. An die Stelle von (4.4.30) tritt jetzt die Grenzwertdarstellung

$$\tilde{Q} = (\tilde{\Pi} - \tilde{U}^\circ) \tilde{R} \triangleq \tilde{Q}_j(s) = - \lim_{(\hat{s}) \rightarrow (s)} \hat{t}_i(\hat{s}) \oint \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \mathfrak{U}_{jk}^\circ(\hat{x} - \hat{x}') \tilde{R}_k(s') ds' \quad (4.6.9)$$

wo in Analogie zu (4.4.5, 9–12)

$$a_j(\mathfrak{x}) = \mathfrak{U}_{jk}^\circ(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \tilde{\mathcal{R}}_k(\mathfrak{x}') \quad (4.6.10)$$

das (mehrdeutige) Verschiebungsfeld einer einzelnen Stufenversetzung mit dem *Burgers*-Vektor  $\tilde{\mathcal{R}}_k$  in  $\mathfrak{x}'$  und

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a_j(\mathfrak{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathfrak{U}_{jk}^\circ(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \tilde{\mathcal{R}}_k(\mathfrak{x}') \quad (4.6.11)$$

das zugehörige Tensorfeld der Verschiebungsableitungen ist. Im Gegensatz zu  $\mathfrak{S}_{ijk}^\circ(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}')$  in (4.4.12) ist aber  $\frac{\partial}{\partial x_i} \mathfrak{U}_{jk}^\circ(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}')$  im allgemeinen nicht in den Indizes  $i$  und  $j$  symmetrisch; ein weiterer Unterschied besteht darin, daß in (4.6.9) an Stelle des Normalenvektors  $\hat{n}_i(\hat{s})$  in (4.4.30) der Tangentenvektor  $\hat{t}_i(\hat{s})$  auftritt. Auch kann  $\mathfrak{U}_{jk}^\circ(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}')$  nicht zur Berechnung von  $\tilde{w}$  in (4.6.3) herangezogen werden.

Andererseits lassen sich jedoch wieder zu (4.4.14–21) analoge Beziehungen herleiten; sie ergeben sich diesmal aus der Überlegung, daß die Integration der Verschiebungsableitungen über eine unendlich lange Schleife aus zwei parallelen Geraden in gleichem Abstand von der Versetzung genau den *Burgers*-Vektor ergeben muß, und daß sich dieses Integral aus Symmetriegründen gleichmäßig auf die beiden Geraden verteilt. Entsprechend der Vertauschung von Normale und Tangente werden jetzt in den (4.4.20–21) entsprechenden Formeln die Winkelfunktionen vor den Integralen vertauscht, wobei  $\cos \tilde{\varphi}_0$  das Vorzeichen wechselt. Im übrigen wird dieselbe Schlußweise angewandt.

Den Kern  $\tilde{\mathfrak{U}}_{ij}^\circ(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}')$ , der jetzt nach (4.6.3) an die Stelle von  $\mathfrak{U}_{ij}^\circ(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}')$  in (4.4.5) tritt, erhält man durch Ableitung der in [27, 52] angegebenen *Airy*-schen Spannungsfunktion einer Stufenversetzung; man überzeugt sich leicht, daß er wie  $\mathfrak{U}_{ij}^\circ(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}')$  nur logarithmisch, also schwach singulär ist. Wir verzichten darauf, die Rechnungen im einzelnen auszuführen; sie verlaufen ganz analog den Rechnungen von § 4.4 und bringen nichts grundsätzlich Neues.

Die Übereinstimmung der Spektren von  $\tilde{\Pi} - \tilde{U}^\circ$  und von  $\Pi^+ U^\circ$  sowie die engen Beziehungen zwischen den jeweiligen Eigenfunktionen legen den Gedanken an eine andere Darstellung des Operators  $\tilde{\Pi} - \tilde{U}^\circ$  nahe, bei der man auf die Berechnung einer neuen Kernfunktion nach (4.6.9–11) verzichtet und statt dessen die Rechtsanwendung des Operators  $\Pi^+ U^\circ$  nach (4.4.39) heranzieht. Mit Hilfe geeigneter Umdeutungen ist dies tatsächlich möglich. Es sei

wie in § 1.3 die Verschiebung  $[a] \triangleq [a_i(s)]$  des Randes  $S^+$  von  $K^+$  gegeben. Dann konvergiert  $[c]$  bei der Iteration

$$[c]^{n+1} = [a] + [c]^n (II^+ U^\circ) \quad (4.6.12)$$

gegen eine Verschiebung  $[c]$  auf  $(S)$ , welche der Gleichung

$$[c] = [a] + [c] (II^+ U^\circ) \quad (4.6.13)$$

oder

$$[c] (II^- U^\circ) = [a] \quad (4.6.14)$$

genügt. Durch beiderseitige Rechtsanwendung von  $II^\circ$  kann man die Gleichung in Kräftebelegungen umschreiben; nach (4.1.8, 9, 16) und (4.2.13) folgt

$$[c] II^- = [a] II^\circ \equiv [a] II^+ + [a] II^- \quad (4.6.15)$$

oder

$$([c] - [a]) II^- = [a] II^+ \quad (4.6.16)$$

Die letzte Gleichung bedeutet physikalisch, daß die Verschiebung  $[c] - [a]$  von  $S^-$  an  $K^-$  dieselbe Kräftebelegung erfordert wie die gegebene Verschiebung  $[a]$  von  $S^+$  an  $K^+$ . Deuten wir nun  $[c]$  als Verschiebungssprung von  $S^+$  gegenüber  $S^-$  (vgl. § 1.3, S. 117), so bewirkt dieser Verschiebungssprung, auf  $(S)$  in  $K^\circ$  angebracht, gerade die vorgegebene Verschiebung  $[a]$  des Ufers  $S^+$  von  $(S)$ . Um allerdings das gesuchte Spannungsfeld zu erhalten, muß man durch Differentiation nach (1.3.1, 6, 7) vom Verschiebungssprung zur Versetzungsbelegung übergehen und deren Spannungsfeld mit Hilfe einer neuen Integraltransformation berechnen.

Wir geben noch — mit den Bezeichnungen von (1.3.14–15) — die Formeln für die Ableitung der Versetzungsbelegung  $[\dot{P}]$  aus der Normal- und der Tangentialkomponente der Verschiebung  $[a] \triangleq [a_i]$  in (1.3.1) an. Mit den *Fre-netschen* Formeln

$$\frac{\partial n}{\partial s} = \frac{t}{\varrho} \quad , \quad \frac{\partial t}{\partial s} = -\frac{n}{\varrho} \quad (4.6.17)$$

erhält man die Normalkomponente

$$[\dot{P}_n] = \frac{\partial [a_n]}{\partial s} - \frac{1}{\varrho} [a_t] \quad (4.6.18)$$

und die Tangentialkomponente

$$[\dot{P}_t] = \frac{\partial [a_t]}{\partial s} + \frac{1}{\varrho} [a_n] \quad (4.6.19)$$

Schließlich kann man, wie bereits im Anschluß an (1.3.14) erwähnt, den nach (4.6.1–19) entwickelten Formelapparat nach der *Schaefer'schen* Analogie [59–61] unter Abänderung der Konstanten nach (1.3.11–12) auf die zweite

Randwertaufgabe an der Platte übertragen. An die Stelle der Versetzungsbelegungen treten dann nach *Hoppe* [61] Biege- und Drillmomente, und an die Stelle der *Airy'schen* Spannungsfunktion die Durchbiegung der Platte.

## § 5. Verfahren zur Konvergenzbeschleunigung für numerische und halbnumerische Iteration

### 5.1 Allgemeines

Wir haben in § 1, § 3 und § 4 Iterationsverfahren zur Lösung von Nicht-homogenitäts- und Randwertproblemen aufgestellt und ihre Konvergenz untersucht; in diesem Paragraphen werden wir uns nun mit Methoden beschäftigen, um die Konvergenz dieser Iterationsverfahren zu beschleunigen, und zwar sowohl für die „rein numerische“ wie für die „halbnumerische“ Rechnung. Unter rein numerischer Iteration oder numerischer Iteration schlechthin verstehen wir alle Verfahren, bei denen sowohl der Operator als auch die verschiedenen Darstellungsfunktionen des elastischen Zustandes in Form von Zahlentabellen gegeben sind und auch das Ergebnis in Form von Zahlentabellen gesucht wird. Unter halbnumerischer Iteration verstehen wir dagegen die Aufstellung einer Folge geschlossener Lösungen von Problemen in einem Grundkörper, welche zu der gesuchten Lösung des gegebenen Problems im Realkörper konvergiert, also Lösungsverfahren der Art, wie sie *Něčas* ([3], S. 316) und *Hetényi* [50] für den unendlichen Keil und *Tölke* ([40], S. 327; [44]) für Staumauerprobleme benützt haben.

Zunächst betrachten wir den Fall der rein numerischen Rechnung. Für den Fall der zweiten Randwertaufgabe an der homogenen Scheibe haben wir uns in § 4.4.D mit der Aufstellung der finiten Ersatzmatrix für den Operator  $\Pi - U^\circ$  beschäftigt; nach der *Wieghardt-Schaefer'schen* Analogie läßt sich dieses Verfahren unmittelbar auf die erste Randwertaufgabe an der Platte übertragen (§ 1.3; [59–61, 165]). Für die erste Randwertaufgabe an der Scheibe und die zweite Randwertaufgabe an der Platte sind die mathematischen Probleme im wesentlichen von der gleichen Art, während die Aufstellung der finiten Ersatzmatrix für räumliche Randwert- und für Nicht-homogenitätsprobleme zwar nach den gleichen Grundprinzipien möglich sein wird, zu ihrer praktischen Durchführung aber noch weitergehende Untersuchungen erfordert.

Wir betrachten nun die finite Ersatzmatrix als gegeben und befassen uns nun mit der Lösung des inhomogenen finiten Gleichungssystems. Nach [31] ist die beste Lösungsmethode fast immer die direkte Elimination; sie setzt jedoch voraus, daß die Matrix des Gleichungssystems im Speicher der Rechenmaschine ständig zur Verfügung steht, was bei den umfangreichen Ersatzmatrizen für die Integraloperatoren von § 4.4 nicht immer zu erreichen sein wird. Bei beschränktem Speicherraum in der Maschine mag es notwendig sein, die Ersatzmatrix „extern“, d. h. auf Band oder Lochkarten zu speichern und bei der Rechnung nur jeweils eine Zeile dieser Matrix in die Maschine einzulesen, wie dies *Seggelke* [133] an der Z 22 durchgeführt hat. In solchen Fällen kommen nur Iterationsverfahren in Frage. Sie sind zwar nach [31] fast immer wesentlich langsamer als die direkte Elimination, allerdings auch gegen Rundungsfehler weniger anfällig, weshalb auch nach einer Lösung durch Elimination häufig „nachiteriert“ wird [31, 68, 69]. Den Nachteil der Langsamkeit kann

man nun bei der Iteration durch verschiedene Konvergenzverbesserungsmethoden mehr oder weniger ausgleichen.

Die „natürliche“ Konvergenz des Iterationsverfahrens (4.1.21) für die isotrope Scheibe ist nicht übermäßig gut; zwar konnten wir zeigen, daß es — bei ständiger Beseitigung etwa durch Rundungsfehler auftretender verbotener Anteile — konvergieren muß; über die Güte der Konvergenz war aber tatsächlich nur eine negative Aussage möglich. Nach einer bekannten Gesetzmäßigkeit strebt das Verhältnis der Normen zweier aufeinanderfolgender Verbesserungen  $R^v$  und  $R^{v+1}$  stets dem größten Eigenwert  $M$  des Operators  $\Pi - U^\circ$  zu, es sei denn, daß die zum größten Eigenwert gehörige Eigenfunktion überhaupt nicht in der gegebenen Belastung enthalten ist; ähnliches gilt, wenn der Iterationsoperator ein kontinuierliches Spektrum hat, das von der Ersatzmatrix durch ein diskretes Spektrum angenähert wird. Im Falle des Operators  $\Pi - U^\circ$  der isotropen Scheibe können wir aber nur eine untere Grenze für den größten Eigenwert angeben, nämlich den größeren der beiden Häufungspunkte der Eigenwerte nach (4.3.31). Wählen wir für ein Zahlen-

beispiel etwa  $\mathcal{M} = 3$ , so erhalten wir danach die Abschätzung  $M \geq \frac{2}{3}$  für den ebenen Spannungszustand. Etwas günstiger wird das Ergebnis mit (4.3.29)

für den ebenen Verzerrungszustand; man erhält dann  $M \geq \frac{5}{8}$ . Schlechter wird

die Abschätzung dagegen für die erste Randwertaufgabe der Plattentheorie, also die allseitig in verbogenem Zustand fest eingespannte Platte; hier erhält man mit (4.3.30)  $M \geq \frac{5}{6}$ . Immerhin können dabei in günstigen Fällen durch-

aus noch tragbare Rechenzeiten herauskommen; so wurde von *Seggelke* [133] nach Tab. 4.3.1 S. 237 und Abb. 4.4.4 S. 258 ein — vom Konvergenzverhalten der Iteration her — durchaus befriedigendes Ergebnis erzielt für  $M = 0,665$ .

Tatsächlich gehört die von *Seggelke* numerisch behandelte isotrope Kreisscheibe zu den Fällen, in denen die einfache Iteration (4.1.21) rascher auf ein praktisch brauchbares Ergebnis führt als die Elimination nach dem *Gauß*schen Algorithmus, wenn man die Anzahl der Stützpunkte auf dem Rand ( $S$ ) nicht

sehr klein wählt. Wir schätzen dies ab für  $\mathcal{M} = 3$ , also  $M = \frac{2}{3}$  und 50 Rand-

punkte; das ergibt ein lineares Gleichungssystem mit 100 Unbekannten. Nun erfordert die direkte Lösung eines Gleichungssystems mit  $N$  Unbekannten nach dem *Gauß*schen Algorithmus etwa  $N^3/3$  Multiplikationen ([68], S. 70; [69], S. 98), für  $N = 100$  benötigt man also etwa 330 000 Multiplikationen.

Andererseits erfordert ein Iterationsschritt die Multiplikation eines Spaltenvektors mit  $N = 100$  Komponenten mit einer quadratischen Matrix, also  $N^2 = 10\,000$  Einzelmultiplikationen, 10 Iterationsschritte somit 100 000 Einzelmultiplikationen. Wie man nun aus § 2.2 und § 2.6 leicht ableitet, gilt für die Norm des Fehlers nach dem  $n$ -ten Iterationsschritt die Abschätzung

$$\| [R] - [R]^n \| \leq \frac{M^n}{1 - M} \| [R] - [R]^0 \| \quad (5.1.1)$$

Mit den Zahlenwerten  $M = \frac{2}{3}$  und  $n = 10$  erhält man aber den Zahlenfaktor

$$\frac{M^n}{1 - M} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{2}{3}} \approx 0,052 \quad (5.1.2)$$

Da nun die Ausgangswerte des Problems in praktisch vorkommenden Aufgaben selbst nur mit begrenzter Genauigkeit bekannt sind, darf man eine für praktische Zwecke ausreichende Genauigkeit zwischen dem 10. und dem 20. Iterationsschritt erwarten. Der Rechenaufwand des *Gaußschen* Algorithmus entspricht aber ungefähr 33 Iterationsschritten!

Die Bewertung der verschiedenen Lösungsmethoden kann also für umfangreiche Gleichungssysteme völlig anders ausfallen als für Gleichungssysteme mit wenigen Unbekannten. Hinzu kommt, daß bei der Iteration (4.1.21) jedes Zwischenergebnis physikalisch deutbar ist und eine bequeme, praktisch stets ausreichende Konvergenzkontrolle erlaubt. Denn wir brauchen (4.1.21) nur in die Form

$$[R]^n = [P] - R^{n+1} + (II - U^\circ) [R]^n \quad (5.1.3)$$

umzuschreiben, um zu erkennen, daß  $[R]^n$  — im Rahmen der durch den Übergang zum finiten Ersatzsystem nach § 4.4.D bedingten Vernachlässigungen — die exakte Lösung darstellt für die Belastung

$$[P]^n = [P] - R^{n+1} \quad (5.1.4)$$

des gegebenen Realkörpers  $K^+$ .

Natürlich wird diese Abschätzung des Rechenaufwandes nicht in jedem Falle so günstig für das einfache Iterationsverfahren ausfallen; bereits die erste Randwertaufgabe für die isotrope Kreisplatte liefert ein Beispiel dafür. In Verbindung mit den Überlegungen am Schluß von § 4.2 (vgl. Abb. 4.2.1, S. 226) wird man allgemein sagen können, daß der Rechenaufwand des Iterationsverfahrens normalerweise um so geringer sein wird, je weniger die gegebene Scheibe  $K^+$  von der Kreisform abweicht. Mit einer im Verlauf der Iteration früher oder später eintretenden schlechten Konvergenz wird man dagegen rechnen müssen, wenn der Realkörper  $K^+$  sehr langgestreckt ist oder irgend eine verwickelte, stark von der einfachen Kreisform abweichende Gestalt hat. Wir werden uns im folgenden mit Methoden beschäftigen, bei denen man einerseits die Vorteile des Iterationsverfahrens, also die bequeme Kontrolle der erreichten Approximation, beibehält, andererseits aber hoffen kann, die Rechenzeiten so weit herunterzudrücken, daß die Iteration auch in dieser Hinsicht mit der direkten Lösung vergleichbar wird oder in günstigen Fällen sogar rascher zum Ziele führt.

Hierfür werden wir einige aus der Literatur bekannte Konvergenzverbesserungsverfahren für symmetrische Operatoren heranziehen und speziell ihre Brauchbarkeit in Verbindung mit dem Operator  $II - U^\circ$  einer isotropen, glatt berandeten Scheibe untersuchen. Natürlich sind diese Verfahren genau so gut

für die anisotrope Scheibe anwendbar oder für die symmetrischen Operatoren der Nichthomogenitätsprobleme von § 3.5–6, so weit sie nicht in Verbindung mit einer Regularisierung nach § 4.3–4 arbeiten und demnach die Existenz eines reinen Punktspektrums mit einer endlichen Anzahl bekannter Häufungspunkte voraussetzen; wir brauchen darauf wohl nicht in jedem Einzelfall hinzuweisen. Teilweise sind diese Konvergenzverbesserungsverfahren sogar auf unsymmetrische Operatoren, etwa von der in § 3.7 beschriebenen Art, anwendbar. Auch hier verzichten wir auf die Darstellung von Einzelheiten.

Besondere praktische Probleme treten dadurch auf, daß die Operatoren  $\Pi^+ U^\circ$  und  $\Pi^- U^\circ$  zwar symmetrisch sind im Zustandsraum  $S$ , in welchem die elastischen Zustände  $g$  als einheitliche Elemente dieses Zustandsraumes erscheinen (§ 4.1–2), daß wir aber bei der numerischen Rechnung mit zwei verschiedenen Repräsentationen desselben elastischen Zustandes arbeiten müssen, nämlich mit den Kräftebelegungen  $R$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  einerseits und den zugehörigen Verschiebungen  $w$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  andererseits. Damit wird die Bildung des Skalarprodukts (4.2.1) im Zustandsraum  $S$

$$\{\hat{R}, U^\circ \hat{R}\} = \{\hat{w}, \hat{R}\} = \{\hat{w}, \hat{R}\} \quad (5.1.5)$$

eine numerisch relativ aufwendige Rechenoperation dadurch, daß die Berechnung der Verschiebung

$$w = U^\circ R \quad (5.1.6)$$

nach (4.4.8) bei der numerischen Rechnung genau wie die Anwendung von  $\Pi^- U^\circ$  die Multiplikation des Ersatz-Spaltenvektors für  $R$  mit einer quadratischen Matrix erfordert, also im Rechenaufwand einem einfachen Iterationsschritt entspricht. Zwar werden wir in § 5.6 zeigen können, daß man unter Ausnutzung der Symmetrie des Operators  $U^\circ$  den Rechenaufwand für (5.1.5) etwa auf die Hälfte herabdrücken kann; die Notwendigkeit einer möglichst sorgfältigen Diskussion der Wirksamkeit des Konvergenzverbesserungsverfahrens bleibt aber trotzdem bestehen.

Allgemein wird man angesichts des großen Umfangs der finiten Gleichungssysteme und der damit verbundenen Aufwendigkeit des einzelnen Iterationsschritts danach trachten müssen, die mit der Gesamtheit aller vorausgegangenen Iterationen gewonnene Information über die gesuchte Lösung möglichst vollständig auszunützen. Dadurch kann die Anwendung relativ verwickelter Konvergenzverbesserungsverfahren sinnvoll werden, die bei kleineren Gleichungssystemen wegen der komplizierten Programmierung praktisch auscheiden. Außerdem fallen bei umfangreichen Gleichungssystemen die „Nebenoperationen“, wie die Bildung von Skalarprodukten zweier Vektoren oder von *Rayleigh*-Quotienten, weit weniger ins Gewicht als bei einer kleineren Zahl von Unbekannten. Die bei *Durand* ([144], Bd. II, S. 132, Tab. (265)) angegebene Rechenzeitdifferenz für einen einzelnen Iterationsschritt zwischen der einfachen Iteration einerseits und den Gradientenverfahren andererseits wird sich also auf ein gegenüber der Gesamtzeit vernachlässigbares Maß reduzieren, wenn man statt mit 9 Unbekannten etwa mit 100 Unbekannten zu rechnen hat. Bei großen Gleichungssystemen kann es sich sogar als sinnvoll erweisen,

bei jedem Iterationsschritt ein kleineres Gleichungssystem aufzulösen, dessen Koeffizienten aus gewissen Skalarprodukten gebildet werden, oder auch sämtliche iterierten Kräftebelegungen für die weitere Rechnung einem *Gram-Schmidt'schen* Orthogonalisierungsprozeß zu unterwerfen, wie wir im folgenden näher ausführen werden. Durch Orthogonalisierung der iterierten Kräftebelegungen geht dann das Iterationsverfahren in eine Sonderform der *Bergman'schen* Reihenentwicklung über, bei der die einzelnen Orthogonalfunktionen in einer dem Problem besonders angepaßten Weise iterativ erzeugt werden. Wir werden dies im folgenden ebenfalls noch näher erläutern; eine Entscheidung, welches Verfahren nun am vorteilhaftesten ist, würde freilich weitere Rechenerfahrung verlangen. Rechenversuche in dieser Richtung sind geplant.

Da wir bei den folgenden Überlegungen von den Eigenschaften des Operators  $\Pi - U^\circ$  selbst, unabhängig von seiner numerischen oder analytischen Realisierung, ausgehen, lassen sich die anschließend beschriebenen Konvergenzverbesserungsverfahren ebenso gut wie auf die numerische auch auf die halbnumerische Iteration anwenden, d. h. auf Folgen geschlossener Lösungen im Grundkörper  $K^\circ$ . Entsprechendes gilt für die Iterationsverfahren von § 3.5–6 für Nichthomogenitätsprobleme. Halbnumerische Verfahren kommen vor allem dann in Frage, wenn man die Lösung verschiedener, von einem oder mehreren Parametern abhängiger Probleme mit einem einzigen Näherungsausdruck erfassen will; es kommt dann darauf an, mit möglichst wenigen und möglichst einfachen Funktionen eine brauchbare Näherungsfunktion aufzubauen. Ein Mittel dafür ist die halbnumerische Iteration. Nun werden aber die Näherungsfunktionen beim geschlossenen Iterieren normalerweise immer komplizierter; man muß also versuchen, durch geeignete Linearkombination mit möglichst wenigen iterierten Funktionen auszukommen; das ist aber genau das Prinzip der im folgenden zu beschreibenden Konvergenzverbesserungsverfahren. Die Konvergenzverbesserung kann demnach bei halbnumerischer Iteration genau so wichtig oder sogar noch wichtiger sein als bei rein numerischen Iterationsverfahren. Denn im rein numerischen Falle ist das Ergebnis immer eine Zahlentabelle, gleichgültig, ob der Endwert rascher oder langsamer erreicht wird. Mit den halbnumerischen Lösungen wird aber, besonders bei physikalischen Fragestellungen, in vielen Fällen weitergerechnet, und damit hängt ihre Brauchbarkeit ganz wesentlich von der Einfachheit der gewonnenen Näherungsausdrücke ab.

Wir werden nun die folgenden Konvergenzverbesserungsverfahren in der in § 1.2 und § 4 für das zweite Randwertproblem an der Scheibe entwickelten Bezeichnungsweise beschreiben; die Übertragung auf andere Probleme durch geeignete Umdeutung dürfte gegebenenfalls keine Schwierigkeiten bereiten.

Wir benutzen neben (5.1.5–6) die ebenfalls bereits in § 1.2 und § 4 eingeführten Abkürzungen

$$P = (\Pi + U^\circ) R, \quad u = w (\Pi + U^\circ) = U^\circ P \quad (5.1.7)$$

$$Q = (\Pi - U^\circ) R, \quad v = w (\Pi - U^\circ) = U^\circ Q \quad (5.1.8)$$

Eckige Klammern dienen wie bisher zur Symbolisierung von Reihensummen



und ihren Grenzwerten sowie von gegebenen Funktionen, die im Verlaufe des Iterationsverfahrens durch eine Reihe approximiert werden (vgl. (1.2.3–4)). Zuweilen werden wir auch abkürzend setzen

$$II^+ U^\circ = \mathcal{L} \quad , \quad II^- U^\circ = E - \mathcal{L} \quad (5.1.9)$$

Den Operator  $II^\circ$  werden wir im folgenden nicht verwenden. Im Gegensatz zu  $U^\circ$  ist er nicht durch eine Quadratur auszudrücken, sondern erfordert zunächst die Bestimmung der Operatoren  $II^+$  und  $II^-$  (vgl. (4.1.9)) durch Lösung der ersten Randwertaufgabe an  $K^+$  und  $K^-$  für alle möglichen Verschiebungen auf dem Rand. Aber selbst wenn es gelingen würde, diesen Operator in einer praktisch brauchbaren Form aufzustellen, so würde er durch seine hohe Singularität Berechnungsprobleme aufwerfen, die auch mit dem Begriff des *Cauchyschen* Hauptwertes (vgl. § 4.4.D) nicht mehr zu erfassen sind. Sicher werden diese Fragen im Prinzip zu lösen sein; für die praktische Rechnung geht man ihnen jedoch besser aus dem Wege. Hochgestellte Zahlen bedeuten, wie bisher, bei den  $g$ -dimensionslosen Operatoren (§ 2.5–6) des Iterationsverfahrens Potenzen, d. h. wiederholte Anwendung, bei den Kräftebelegungen und Verschiebungen dagegen die Nummer des Iterationsschrittes.

## 5.2 Das Iterationsverfahren von *Wiarda*

In § 2.6 haben wir die Operatorgleichung (2.6.1)

$$\mathfrak{A}[f] = [b] \quad (5.2.1)$$

mit dem gegebenen Element  $[b]$  und

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{E} - \mathfrak{A} \quad (5.2.2)$$

ersetzt durch (2.6.20)

$$\beta \mathfrak{A}[f] = \beta [b] \quad (5.2.3)$$

und den neuen Operator

$$\tilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{E} - \beta \mathfrak{A} = (1 - \beta) \mathfrak{E} + \beta \mathfrak{B} \quad (5.2.4)$$

an Stelle von  $\mathfrak{B}$  eingeführt. Damit tritt an die Stelle des einfachen Iterationsverfahrens (2.6.6), das wir von nun an durch einen Stern kennzeichnen,

$$[f]^{n*} = [b] + \mathfrak{B}[f]^{n-1} \quad (5.2.5)$$

die neue Iterationsvorschrift

$$[f]^n = \beta [b] + \beta \mathfrak{B}[f]^{n-1} + (1 - \beta) [f]^{n-1} \quad (5.2.6)$$

welche aus (5.2.5) hervorgeht, wenn man darin  $\mathfrak{B}$  durch  $\tilde{\mathfrak{B}}$  ersetzt. Dies ist — bis auf eine unwesentliche Änderung in der Bezeichnungsweise — das *Wiardasche* Iterationsverfahren ([130], § 19; [145]).

Wir schreiben (5.2.5–6) in die Kräftebelegungen und Operatoren von § 1.2 und § 4 für die Scheibe um. Dann geht (5.2.5) in die — jetzt mit einem Stern gekennzeichnete — Gleichung (4.1.21) über

$$[R]^{n*} = [P] + (II^- U^\circ) [R]^{n-1} \quad (5.2.7)$$

woraus man die zu (5.2.6) entsprechende *Wiardasche* Form des Iterationsverfahrens

$$[R]^n = \beta [P] + \beta (II - U^\circ) [R]^{n-1} + (1 - \beta) [R]^{n-1} \quad (5.2.8)$$

gewinnt.

Für einen Vergleich der *Wiardaschen* Iteration mit dem einfachen Iterationsverfahren benötigen wir die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungen beim einfachen Iterationsverfahren oder kurz das „ $n$ -te Roh-Reihenglied“

$$R^{n*} = [R]^{n*} - [R]^{n-1} = [P] + (II - U^\circ) [R]^{n-1} - [R]^{n-1} \quad (5.2.9)$$

Es entspricht dem negativen  $(n - 1)$ -ten Rest in der Theorie der Relaxationsverfahren in der Matrizenrechnung [30, 68, 69]. Andererseits ist die Differenz zwischen der  $n$ -ten und der  $(n - 1)$ -ten Näherung beim *Wiardaschen* Iterationsverfahren, die wir kurz als das „ $n$ -te Reihenglied“ schlechthin bezeichnen

$$\begin{aligned} R^n &= [R]^n - [R]^{n-1} \\ &= \beta [P] + \beta (II - U^\circ) [R]^{n-1} + (1 - \beta) [R]^{n-1} - [R]^{n-1} \\ &= \beta ([P] + (II - U^\circ) [R]^{n-1} - [R]^{n-1}) = \beta R^{n*} \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Das  $n$ -te Reihenglied ist also gleich dem  $\beta$ -fachen  $n$ -ten Roh-Reihenglied.

Nun denken wir uns, von  $[R]^{n-1}$  ausgehend, zwei gewöhnliche Iterationsschritte hintereinander ausgeführt. Beim ersten Schritt erhalten wir das  $n$ -te Roh-Reihenglied nach (5.2.9), beim zweiten Schritt nach (4.1.20) das „ $(n + 1)$ -te iterierte Roh-Reihenglied“

$$R^{n+1**} = (II - U^\circ) R^{n*} = Q^{n*} = R^{n*} - P^{n*} \quad (5.2.11)$$

wobei wir die rechte Seite mit den Abkürzungen (5.1.7–8) umgeformt haben. Führen wir dagegen, von  $[R]^{n-1}$  ausgehend, zuerst einen *Wiardaschen* und daran anschließend einen gewöhnlichen Iterationsschritt aus, so erhalten wir mit (5.2.10), (5.2.7) und (5.2.11) das  $(n + 1)$ -te Roh-Reihenglied

$$\begin{aligned} R^{n+1*} &= [R]^{n+1*} - [R]^n \\ &= [P] + (II - U^\circ) [R]^{n-1} + \beta (II - U^\circ) R^{n*} - [R]^n \\ &= [R]^{n*} - [R]^n + \beta Q^{n*} = (1 - \beta) R^{n*} + \beta Q^{n*} \\ &= R^{n*} - \beta P^{n*} \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Die Zusammenhänge (5.2.10–12) sind in Abb. 5.2.1 durch symbolische Konstruktion dargestellt; die Abb. gibt die Modifikationen wieder, welche der

Vektorzug von Abb. 2.2.1 durch den Übergang zur *Wiardaschen* Iteration erfährt. Aus dieser Abb. ist nun mit (5.2.10) auch leicht ein hinreichendes Konvergenzkriterium abzulesen. Die *Wiardasche* Iteration konvergiert sicher,

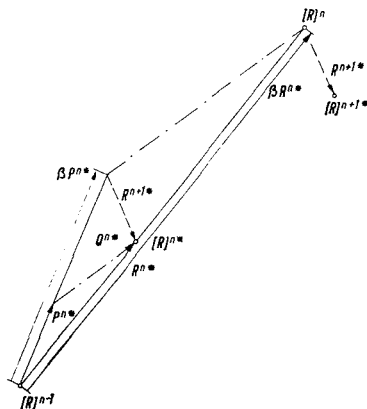


Abb. 5.2.1. Symbolische Konstruktion zum Iterationsverfahren von *Wiarda*  
Parallelen sind durch gleiche Strichart gekennzeichnet

wenn es gelingt, ein festes  $\beta$  so zu bestimmen, daß die Normen der Roh-Reihenglieder wenigstens in geometrischer Progression mit  $n$  abnehmen. Die Roh-Reihenglieder sind auch zur Beurteilung der erreichten Approximation nach (5.1.4) zu verwenden.

Genauere Anhaltspunkte zur bestmöglichen Wahl von  $\beta$  erhält man nach Satz 1 von § 2.5 für symmetrische Operatoren, falls die untere Grenze  $m$  und die obere Grenze  $M$  des Spektrums von  $\mathfrak{B}$  bzw. von  $\Pi - U^\circ$  bekannt sind. Wir benützen dazu eine symbolische elementargeometrische Konstruktion, indem wir Abb. 2.5.1 derart abwandeln, daß nicht mehr der  $\mathfrak{B}f$  entsprechende symbolische Vektor oder „Funktionenvektor“  $Q^{n*}$  nach (5.2.11), sondern der Funktionenvektor

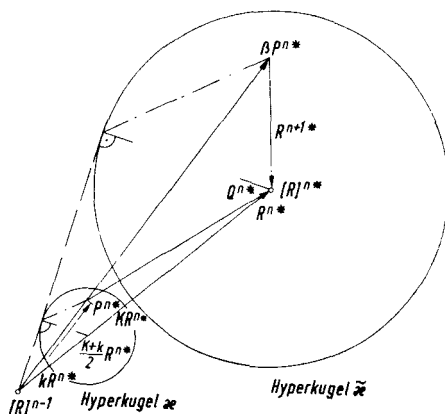
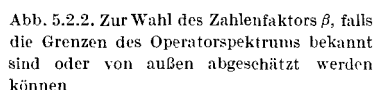
$$P^{n*} = (\Pi + U^\circ) R^{n*} = R - Q^{n*} \quad (5.2.13)$$

vom selben Anfangspunkt wie  $R^{n*}$  abgetragen wird. Die Grenzen des Spektrums von  $\Pi + U^\circ$  sind

$$k = 1 - M, \quad K = 1 - m \quad (5.2.14)$$

und man überlegt sich leicht, daß in dieser Darstellung die Spitze des Funktionenvektors  $P^{n*}$  auf eine „Hyperkugel“ $\varkappa$  eingeschränkt werden kann, welche aus der Hyperkugel  $\mu$  von Abb. 2.5.1 durch Spiegelung an der „Mittellotenebene“ von  $R^{n*}$  hervorgeht (Abb. 5.2.2). Aus Abb. 5.2.1 entnimmt man ferner, daß der Funktionenvektor  $R^{n+1*}$ , von der Spitze des Funktionenvektors  $\beta P^{n*}$  aus abgetragen, mit seiner Spitze gerade die Spitze des Funktionenvektors  $R^{n*}$  trifft. Streckt man also sämtliche Funktionenvektoren  $P^{n*}$  und damit die Hyperkugel  $\varkappa$  von dem Zentrum  $[R]^{n-1}$  aus um den gemeinsamen Faktor  $\beta$ , und wählt man diesen Streckungsfaktor so, daß der Mittelpunkt der ge-

strecken „Hyperkugel  $\tilde{\omega}$ “ auf die Spitze des Funktionenvektors  $R^{n*}$  zu liegen kommt, so hat man die Norm des Funktionenvektors  $R^{n+1*}$  eingeschränkt auf den Radius dieser Hyperkugel  $\tilde{\omega}$  (Abb. 5.2.2). Man erkennt zugleich, daß dies die günstigste mit dem *Wiardaschen* Verfahren zu erzielende Konvergenzabschätzung ist.



Elementargeometrische Überlegungen an Hand von Abb. 5.2.2 führen auf die günstigste Wahl des Zahlfaktors

$$\beta = \frac{2}{K+k} \quad (5.2.15)$$

Aus der Abb. liest man weiterhin die Konvergenzabschätzung des *Wiarda-*  
schen Verfahrens ab

$$\frac{\|R^{n+1*}\|}{\|R^{n*}\|} \leq \frac{K-k}{K+k} \quad (5.2.16)$$

wobei in unserem Falle unter der Norm die Wurzel aus der doppelten elastischen Energie im Grundkörper  $K^\circ$  zu verstehen ist. Aus (5.2.16) folgt man also, daß sich die Konvergenz der Iteration nach dem *Wiardaschen* Verfahren stets erzwingen läßt, wenn nur die untere Grenze  $k$  des Spektrums von  $\Pi^+ U^\circ$  positiv ist.

Mit Sicherheit kann die Konvergenz des Iterationsverfahrens auch erzwungen werden, wenn an die Stelle von  $k$  eine positive untere Schranke für  $k$  und an die Stelle von  $K$  eine endliche obere Schranke für  $K$  tritt, wenn also, wie wir kurz sagen wollen, das Spektrum des Operators  $\Pi^+ U^\circ$  bzw.  $\mathfrak{C} - \mathfrak{B}$  auf der positiven Achse von außen eingeschränkt werden kann. Dies trifft aber auf die Operatoren  $\mathfrak{B}'$  und  $\mathfrak{B}''$  für die Nichthomogenitätsprobleme von § 3.5 und § 3.6 zu, falls nur die Ungleichungen (3.5.22) bzw. (3.6.22) erfüllt sind. Man kann sich also mit Hilfe des *Wiardaschen* Iterationsverfahrens von den

Kriterien (3.5.21) bzw. (3.6.21) freimachen und den Grundkörper — auch ohne die gemischte Iteration von § 3.7 — ausschließlich nach den am Schluß von § 3.6 diskutierten Gesichtspunkten wählen.

Bei dem Operator  $\Pi^+ U^\circ$  für das Randwertproblem der isotropen Scheibe dagegen können die Grenzen des Spektrums nur „von innen“ aus der Lage seiner beiden durch (4.3.31, 36) bestimmten Häufungspunkte abgeschätzt werden. Man kennt also nur eine kleinste mögliche „Hyperkugel  $\mathfrak{K}^\circ$ “; von der wirklichen Hyperkugel  $\mathfrak{K}$  weiß man nur, daß sie einerseits die Hyperkugel  $\mathfrak{K}^\circ$  ganz enthält und daß sie andererseits von den Enden des Funktionenvektors  $R^{n*}$  einen gewissen endlichen Abstand hat (vgl. § 4.1-2), über dessen Größe man aber im allgemeinen Fall nichts Sicheres aussagen kann (Abb. 5.2.3).

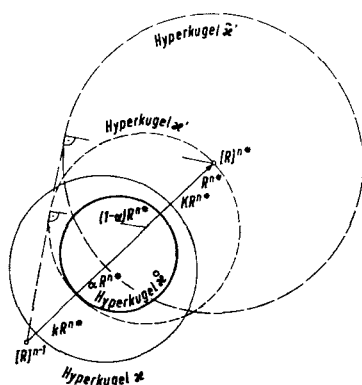


Abb. 5.2.3. Zur Wahl des Zahlenfaktors  $\beta$ , falls die Grenzen des Operatorspektrums nur von innen abgeschätzt werden können

Trotzdem gibt es auch in diesem Fall eine Wahl von  $\beta$ , welche die Konvergenzabschätzung mit Sicherheit verbessert, wenn sie auch normalerweise nicht den optimalen Wert darstellt. Man braucht für die Bestimmung von  $\beta$  nur die in Abb. 5.2.3 gestrichelt eingezeichnete „Hyperkugel“  $\mathcal{K}''$  zugrunde zu legen, welche einerseits durch die kleinste mögliche Hyperkugel  $\mathcal{K}''$  von innen berührt wird, andererseits durch die Spitze von  $R^{n*}$  geht. Dazu konstruiert man nach Abb. 5.2.2 die zugehörige Hyperkugel  $\mathcal{K}'$  und erhält damit nach Abb. 5.2.3

$$\beta = \frac{2}{1 + \alpha} \quad (5.2.17)$$

wo  $\alpha$  der kleinere Häufungswert der Eigenwerte  $\lambda_i$  ist. Eine Konvergenzabschätzung ist hier jedoch nicht mehr möglich, da die wirkliche Hyperkugel  $\mathcal{K}$  nicht bekannt ist.

Die Schlüssigkeit dieser elementargeometrischen Überlegungen folgt aus Corollar 1.1 von § 2.5. Natürlich lassen sich die Beziehungen (5.2.15–17) auch rein rechnerisch beweisen; auf diesem Wege wurden sie bereits von *Wiarda* gefunden [130, 145, 146]. Wir glauben jedoch, daß die elementargeometrischen

Konstruktionen in diesem Fall eine einprägsamere Darstellung der Zusammenhänge zu geben vermögen.

Bei einfachen Scheibenformen wird das *Wiardasche* Verfahren im allgemeinen wohl eine merkliche Verbesserung der Konvergenz bringen; es hat außerdem den großen Vorteil, daß es praktisch keinen zusätzlichen Rechenaufwand verursacht und einfach zu programmieren ist. Bei der isotropen belasteten Kreisscheibe erhält man mit  $\mathcal{M} = 3$ , also  $M = K = \frac{2}{3}$  den Konvergenzfaktor (5.2.16)

zu  $\frac{1}{3}$ , bei der fest eingespannten Kreisplatte mit  $M = K = \frac{5}{6}$  immerhin noch

zu  $\frac{2}{3}$ . Kennt man also einen Wert von  $\beta$ , der die Konvergenz des Verfahrens

mit Sicherheit nicht verschlechtert, so wird der Übergang zur *Wiarda*-Iteration auf alle Fälle dann nur von Nutzen sein können, wenn nach einer gewissen Zahl gewöhnlicher Iterationsschritte die rasch konvergenten Eigenfunktionen abgeklungen sind und die Konvergenz sich merklich verschlechtert. Bei komplizierten Bereichsformen ist allerdings der Grad der Verbesserung, den dieses Verfahren bringt, kaum abzuschätzen. Wahrscheinlich ist das *Wiardasche* Verfahren dann zu „starr“; es vermag sich wegen der Konstanz von  $\beta$  nicht der jeweiligen Lage der Näherungslösung im Zustandsraum anzupassen. Wir diskutieren daher in den nächsten Ziffern einige Verfahren mit variablen Koeffizienten  $\beta_n$ . Sie sind zwar in Programmierung und Rechnung für jeden einzelnen Iterationsschritt wesentlich aufwendiger; dies dürfte jedoch durch ihre größere Wirksamkeit sehr oft mehr als ausgeglichen werden.

### 5.3 Methoden mit einem veränderlichen Koeffizienten

Unter dieser Ziffer werden wir einige Gesichtspunkte diskutieren, nach denen man den festen Koeffizienten  $\beta$  des *Wiardaschen* Iterationsverfahrens durch Koeffizienten  $a_n$  bzw.  $b_n$  ersetzen kann, die für jeden Iterationsschritt neu bestimmt werden. Das erste dieser beiden Verfahren, die „Methode des schnellsten Abstiegs“, ist bereits aus der Matrizenrechnung bekannt [31, 69, 144, 151], läßt sich aber auf beliebige symmetrische und eigentlich positiv definite Operatoren übertragen [62–64, 147]. Das zweite Verfahren, die „Methode der kleinsten Restnorm“, hat der Verfasser bisher nur in ([151], Kap. VII) und ([144], S. 130–132) im Zusammenhang mit der Matrizenrechnung vorgefunden. Seine Übertragbarkeit auf beliebige eigentlich positiv definite und — mit stärkeren Einschränkungen — gewisse unsymmetrische Operatoren läßt sich jedoch ohne Schwierigkeiten einsehen.

Nun sind die Operatoren  $\Pi^+ U^\circ$  und  $\Pi^- U^\circ$  nur im Zustandsraum  $S$  symmetrisch; bei der praktischen Rechnung hat man für denselben Zustand  $g$  des Grundkörpers zwei Repräsentationen zu verwenden, wenn man von diesen Symmetrieeigenschaften Gebrauch machen will, nämlich die Kräftebelegungen  $R$  und die Verschiebungen  $w$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  nach (5.1.6). Bei der formalen Übertragung eines Verfahrens der Matrizenrechnung spielt indessen nach (4.2.27) der Übergang von den Kräftebelegungen zu den Verschiebungen keine größere Rolle als der Übergang von den Spaltenvektoren zu den Zeilenvektoren

in der Matrizenrechnung. Eine quadratische Matrix wird bei einem Iterationsverfahren von links auf einen Spaltenvektor angewandt, genau wie der Operator  $\Pi^+ U^\circ$  auf eine Kräftebelegung. Und von rechts wird die quadratische Matrix auf den zugehörigen Zeilenvektor angewandt, genau wie der Operator  $\Pi^- U^\circ$  auf die nach (5.1.6) zugehörige Verschiebung.

Wir stellen die formalen „Übersetzungsregeln“ für Verfahren aus der Matrizenrechnung zusammen:

1. An die Stelle der Spaltenvektoren treten die Kräftebelegungen  $R$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$ . (5.3.1)

2. An die Stelle der Zeilenvektoren treten die Verschiebungen  $w$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$ . (5.3.2)

3. An die Stelle der Transposition eines Spaltenvektors in einen Zeilenvektor tritt die Operation  $w = U^\circ R$ . (5.3.3)  
Sie entspricht hier allerdings im Rechenaufwand wenigstens einem halben Iterationsschritt.

4. An die Stelle der Transposition eines Zeilenvektors in einen Spaltenvektor tritt die Operation  $R = \Pi^\circ w$ . (5.3.4)  
Wir werden von dieser Operation allerdings aus den in § 5.1 angegebenen Gründen keinen Gebrauch machen.

5. Dem  $n$ -ten Rest in der Matrizenrechnung [68, 69, 144] entspricht hier nach Umkehrung des Vorzeichens nach (5.2.9) das  $(n + 1)$ -te Roh-Reihenglied  $R^{n+1*}$ . (5.3.5)

Natürlich sind das nur formale Übersetzungsregeln. Die tatsächliche Zulässigkeit einer solchen Übersetzung muß gesondert nachgewiesen werden, falls sich das betrachtete Verfahren nicht aus den allgemeineren Überlegungen der Funktionalanalysis unabhängig begründen läßt.

### 5.3.A. Die Methode des schnellsten Abstiegs.

Die Begründung dieser Methode folgt für einen eigentlich positiv definiten Operator  $\Pi^+ U^\circ$  aus dem Variationsproblem (4.2.42). Setzen wir für  $\Pi^+ U^\circ$  die Abkürzung  $\mathcal{L}$  nach (5.2.9) ein, so erscheint (4.2.42) in der Form

$$\frac{1}{2} \{w, \mathcal{L} R\} - \{w, [P]\} = \min(R) \quad (5.3.6)$$

wo die Kräftebelegung  $R$  und die zugehörige Verschiebung  $w = U^\circ R$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  den zur Variation zugelassenen elastischen Zustand  $g$  des Grundkörpers repräsentieren.  $[P]$  ist die gegebene Kräftebelegung, für welche die zweite Randwertaufgabe am Realkörper  $K^+$  zu lösen ist. Die geometrisch-anschauliche Begründung des Verfahrens in der Matrizenrechnung [69] läßt sich auf den Zustandsraum  $S$  übertragen, wenn der Operator  $\mathcal{L}$  ein reines Punktspektrum mit den Eigenwerten  $\lambda_i$  und den normierten Eigenelementen  $g$  mit den Repräsentationen  $R$  und  $w$  besitzt (vgl. § 4.3). Dann läßt sich

$$\frac{1}{2} \{w, \mathcal{L} R\} - \{w, [P]\} = C^2 \quad (5.3.7)$$

für verschiedene Werte des Parameters  $C$  auffassen als die Gleichung einer Schar von „Hyperellipsoiden“ im Zustandsraum  $S$  mit dem gemeinsamen Mittelpunkt

$$g = [g] \quad (5.3.8)$$

wo der elastische Zustand  $[g]$  mit den Repräsentationen  $[R]$  und  $[w]$  die gesuchte Lösung ist. Den Hauptachsenrichtungen des Hyperellipsoids entsprechen die Eigenelemente  $^{<i>}g$  von  $\mathcal{L}$ , und die Halbachsen ergeben sich zu

$$A_i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa_i}} \left( C^2 + \frac{1}{2} \{[w], \mathcal{L}[R]\} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{C''}{\sqrt{\kappa_i}} \quad (5.3.9)$$

Der Ausdruck

$$\frac{1}{2} \{w, \mathcal{L} R\} = \frac{1}{2} \sum_i \kappa_i \{w, R\}^{<i>2} = \frac{1}{2} \sum_i \kappa_i \{R, w\}^{<i>2} = C^2 + \{w, [P]\} \quad (5.3.10)$$

ist nichts anderes als der auf den Teilbereich ( $K^+$ ) von  $K^\circ$  entfallende Anteil der elastischen Energie des Grundkörpers im Zustand  $g$ , wie man aus (4.2.34) leicht ableitet. Er ist also auch gleich der elastischen Energie im Realkörper  $K^+$ , wenn man ihn derselben Verzerrung unterwirft. Ferner ist nach der Definition (4.2.1) des Skalarprodukts im Zustandsraum  $S$   $\{w, [P]\}$  die Arbeit, welche die gegebene Kräftebelegung  $[P]$  an der Verschiebung  $w$  leistet. (5.3.7) bedeutet also die gesamte potentielle Energie des Spannungsfeldes im Realkörper  $K^+$  und der daran angreifenden Kräftebelegung  $[P]$ , wenn seine Verzerrung dem elastischen Zustand  $g$  des Grundkörpers entspricht, und (5.3.6) erweist sich als das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie [1, 2, 30–37, 71, 78, 109, 110] für den Realkörper  $K^+$ , ausgedrückt durch Zustände des Grundkörpers  $K^\circ$ . Die Eulersche Gleichung zu dem Variationsproblem (5.3.6) ist

$$\mathcal{L} R = [P] \quad \text{bzw.} \quad w \mathcal{L} = U' [P] \equiv [u] \quad (5.3.11)$$

Man prüft leicht nach, daß für ihre Lösung  $[R]$  bzw.  $[w]$  die Halbachsen (5.3.9) verschwinden, daß also die gesuchte Lösung tatsächlich dem Mittelpunkt (5.3.8) des Systems der Hyperellipsoide (5.3.7) entspricht.

Nun kann man weiter zeigen, daß das Roh-Reihenglied  $R^{n*}$  senkrecht steht auf dem Hyperellipsoid der Schar (5.3.7), welches durch den Punkt  $[R]^{n-1}$  des Zustandsraumes  $S$  geht. Bodewig [69] weist dies im Falle der Matrizenrechnung durch eine halbanschaulich-geometrische Argumentation nach. Zurmühl [68] auf rechnerischem Wege\*). Die Schlußweise in [68] läßt sich ohne weiteres auf den Zustandsraum  $S$  übertragen, wenn man nur die Differentiale durch Variationen ersetzt. Denn ist  $\delta g$ , repräsentiert durch  $\delta R$  und  $\delta w$ , die Variation eines elastischen Zustandes  $g$  des Grundkörpers  $K^\circ$ , und schränkt man diese Variation ein durch die Bedingung, daß der Ausdruck (5.3.7) konstant bleiben muß, so ergibt sich die Orthogonalitätsbeziehung

$$\{\delta w, \mathcal{L} R - [P]\} = 0 \quad (5.3.12)$$

\*) Vgl. auch die besonders umfassende Darstellung in ([151], Kap. VI, VII).



durch Variation von (5.3.7) bei festem  $[P]$  und  $C$ . Andererseits ist nach (5.2.9) mit der Abkürzung (5.1.9)

$$R^{n*} = [P] - \mathcal{L} [R]^{n-1} \quad (5.3.13)$$

Setzt man also in (5.3.12)

$$R = [R]^{n-1} \quad (5.3.14)$$

so folgt die behauptete Orthogonalitätsrelation

$$\{\delta w, R^{n*}\} = 0 \quad (5.3.15)$$

Auf Grund dieser Beziehung werden die Methode des schnellsten Abstiegs und das in der nächsten Ziffer zu behandelnde *Hestenes-Stiefel*-Verfahren auch als „Gradienten-Verfahren“ bezeichnet. In unserem Falle stellt das Roh-Reihen-glied  $R^{n*}$  nichts anderes dar als den Gradienten der potentiellen Energie des Realkörpers  $K^+$  mit der Kräftebelegung  $[P]$  im Zustandsraum  $S$ .

Der Grundgedanke der Methode des schnellsten Abstiegs besteht nun darin, längs dieses Gradienten den Punkt aufzusuchen, in welchem der Ausdruck (5.3.7) am kleinsten wird, also — in geometrischer Ausdrucksweise — die Stelle, an welcher die Fortsetzung von  $R^{n*}$  gerade ein Hyperellipsoid der Schar (5.3.7) berührt. Wegen der weiteren Herleitung verweisen wir nun auf die Literatur [31, 62–64, 69, 144, 147, 151] und schreiben sofort das Ergebnis an. Danach tritt bei der Methode des schnellsten Abstiegs an die Stelle von (5.2.8) — wobei wir wieder die Abkürzung (5.1.9) benützen —

$$[R]^n = a_n [P] - a_n \mathcal{L} [R]^{n-1} + [R]^{n-1} \quad (5.3.16)$$

mit

$$a_n = \frac{\{w^{n*}, R^{n*}\}}{\{w^{n*}, \mathcal{L} R^{n*}\}} \quad (5.3.17)$$

Es läßt sich zeigen, daß dieses Verfahren mitsamt den anschließend referierten Ergebnissen auch unabhängig von der Existenz eines Punktspektrums für beliebige eigentlich positiv definite Operatoren  $\mathcal{L}$  begründet werden kann [62–64, 147].

Ein deutlicher Vorteil dieser Methode gegenüber dem *Wiardaschen* Iterationsverfahren ist jedenfalls, daß man zur Bestimmung der Koeffizienten  $a_n$  nichts über das Spektrum des Operators  $\mathcal{L}$  zu wissen braucht, falls man nur sicher ist, daß eine positive untere Grenze  $k$  überhaupt existiert. Von *Kantorowitsch* [64, 147, 151] stammt die folgende Konvergenzabschätzung

$$\| [R]^n - [R] \| \leq \frac{1}{k} \left( \frac{K - k}{K + k} \right)^n \{ [w]^0, \mathcal{L} [R]^0 \}^{\frac{1}{2}} \quad (5.3.18)$$

Sie ist von derselben Ordnung wie die Abschätzung (5.2.16) für das *Wiardasche* Verfahren; doch hat man zu bedenken, daß (5.2.16) im Gegensatz zu (5.3.18) bereits die Kenntnis der Grenzen des Operatorspektrums voraussetzt. Tatsächlich ist die Konvergenz der Methode des schnellsten Abstiegs in den meisten Fällen besser als die des *Wiardaschen* Verfahrens, wenigstens wenn man sich auf die Zahl der Iterationsschritte und nicht auf die Zeitdauer der Rechnung bezieht.

Wir suchen uns nun das Ergebnis (5.3.16–17) mit Hilfe der symbolischen Konstruktion von Abb. 5.2.1 klarzumachen. Zunächst erkennt man leicht, daß die Beziehungen (5.2.10–12) mit  $a_n$  an Stelle von  $\beta$  auch für jeden einzelnen Schritt der Methode des schnellsten Abstiegs gelten. Damit läßt sich auch die Konstruktion von Abb. 5.2.1 unverändert übertragen. Beachten wir nun noch, daß der Funktionenvektor  $R^n = a_n R^{n*}$  im Punkt  $[R]^n$  ein Hyperellipsoid der Schar (5.3.7) berührt, und daß  $R^{n+1*}$  nach (5.3.15) senkrecht auf diesem Hyperellipsoid steht, so erkennen wir, daß die Funktionenvektoren  $R^{n*}$  und  $R^{n+1*}$  miteinander einen rechten Winkel bilden müssen. Sind also  $R^{n*}$ ,  $Q^{n*} = (II - U^0) R^{n*}$  und damit  $P^{n*} = \mathcal{L} R^{n*}$  gegeben, so hat man nur

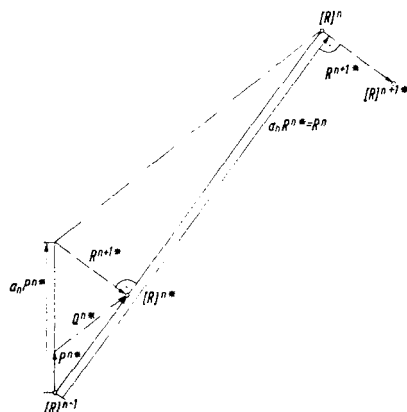


Abb. 5.3.1. Symbolische Konstruktion zur Methode des schnellsten Abstiegs

$P^{n*}$  bis zum Schnitt mit der Senkrechten auf  $R^{n*}$  in  $[R]^n$  zu verlängern und im übrigen die Konstruktion wie in Abb. 5.2.1 weiterzuführen (Abb. 5.3.1).

Hat der Operator  $\mathcal{L}$  nur zwei Eigenwerte  $k$  und  $K$ , so läßt sich nach Corollar 1.2 von § 2.5 und Abb. 2.5.2 das ganze Iterationsverfahren zeichnerisch durch-

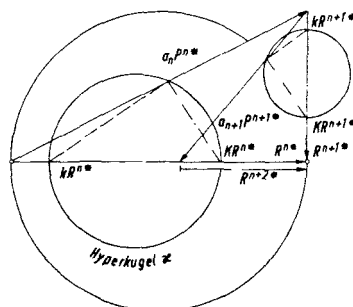


Abb. 5.3.2. Zwei aufeinanderfolgende Schritte nach der Methode des schnellsten Abstiegs, falls das Operatorspektrum nur zwei Eigenwerte besitzt

führen, wenn nur ein Roh-Reihenglied  $R^{n*}$  und das zugehörige  $P^{n*}$  bekannt sind. In Abb. 5.3.2 sind zwei Schritte der Methode des schnellsten Abstiegs

für diesen Fall gezeichnet. Man erkennt, daß bei genau zwei Eigenwerten das Roh-Reihenglied  $R^{n+2*}$  ein skalarer Bruchteil des Roh-Reihengliedes  $R^{n*}$  ist; die Koeffizienten  $a_n$  müssen also mit 2 periodisch sein. Falls sich sämtliche Eigenwerte sehr dicht um zwei Häufungspunkte gruppieren, ist wenigstens noch eine näherungsweise Periodizität der  $a_n$  zu erwarten, eine Eigenschaft, die sich offenbar *Bückner* ([130], S. 21) zunutze gemacht hat. Weiter ist  $a_n$  der reziproke *Rayleigh-Quotient* des Operators  $\mathcal{L}$  für die Funktion  $R^{n*}$ . Demnach gilt allgemein

$$\frac{1}{K} \leq a_n \leq \frac{1}{k} \quad (5.3.19)$$

was man sich auch zeichnerisch leicht klarmachen kann.

Aus der physikalischen Bedeutung von (5.3.7) entnimmt man, daß sich jeder Schritt der Methode des schnellsten Abstiegs auch auffassen läßt als eine — wenn auch sehr grobe — Näherungslösung des Variationsproblems (5.3.6) nach dem *Trefftz*schen Verfahren [2, 33–37, 123–125, 148], bei dem nur zwei Vergleichsfunktionen benutzt werden. Im Gegensatz zu der üblichen Form des *Trefftz*schen Verfahrens aber sind diese Vergleichsfunktionen hier nicht direkt, sondern in der Form elastischer Zustände des Grundkörpers und ihrer Repräsentationen gegeben. Durch iterative Wiederholung dieses „abgekürzten *Trefftz*schen Verfahrens“ läßt sich schließlich jede gewünschte Genauigkeit erreichen.

### 5.3.B. Die Methode der kleinsten Restnorm.

Bei der Methode der kleinsten Restnorm wird an Stelle des Koeffizienten  $a_n$  in (5.3.16–17) ein Koeffizient  $b_n$  eingesetzt, welcher so bestimmt wird, daß nicht der Ausdruck (5.3.7), sondern die Norm des nächsten Roh-Reihengliedes

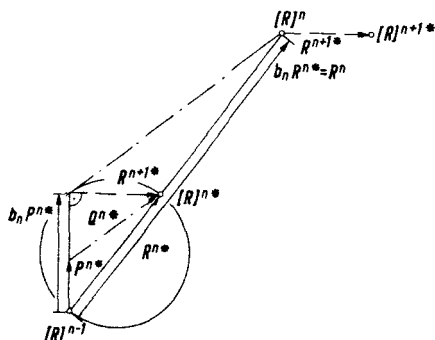


Abb. 5.3.3. Symbolische Konstruktion zur Methode der kleinsten Restnorm

$R^{n+1*}$  möglichst klein wird. Aus dieser Forderung ergibt sich sofort die symbolische Konstruktion von Abb. 5.3.3; die Funktionenvektoren  $R^{n*}$ ,  $b_n R^{n*}$

und  $R^{n+1*}$  müssen demnach ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse  $R^{n*}$  bilden. Aus der Abb. liest man ab

$$b_n = \frac{\|R^{n*}\|}{\|P^{n*}\|} \cos(R^{n*}, P^{n*}) = \frac{\|R^{n*}\| \{R^{n*}, U^\circ P^{n*}\}}{\|P^{n*}\|^2 \|R^{n*}\|} = \frac{\{R^{n*}, U^\circ P^{n*}\}}{\{P^{n*}, U^\circ P^{n*}\}} \quad (5.3.20)$$

Demnach vollzieht sich die Iteration nach der Methode der kleinsten Restnorm entsprechend der Vorschrift

$$[R]^n = b_n [P] - b_n \mathcal{L} [R]^{n-1} + [R]^{n-1} \quad (5.3.21)$$

mit

$$b_n = \frac{\{w^{n*}, \mathcal{L} R^{n*}\}}{\{w^{n*} \mathcal{L}, \mathcal{L} R^{n*}\}} \quad (5.3.22)$$

Man erkennt sofort, daß dieses Verfahren die Konvergenz, gemessen an der Zahl der für eine vorgeschriebene Näherung erforderlichen Iterationsschritte, zumindest nicht verlangsamt, wenn das Verfahren sowieso konvergiert, also der Operator  $1 - \mathcal{L} = I - U^\circ$  eine obere Grenze unterhalb Eins besitzt. Dies gilt auch für unsymmetrische Operatoren. Eine für symmetrische Operatoren gültige Konvergenzabschätzung entnimmt man aus Abb. 5.3.4. Der ungün-

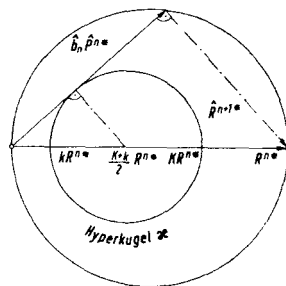


Abb. 5.3.4. Zur Konvergenzabschätzung für die Methode der kleinsten Restnorm

stigste Fall tritt offenbar dann ein, wenn der Funktionenvektor  $P^{n*}$  die Hyperkugel  $\mathcal{K}$  gerade berührt; eine einfache Ähnlichkeitsbetrachtung nach Abb. 5.3.4 führt dann auf

$$\frac{||R^{n+1*}||}{||R^{n*}||} \leq \frac{K-k}{K+k} \quad (5.3.23)$$

Dies ist identisch mit der Abschätzung (5.2.16) für das *Wiardasche* Iterationsverfahren. Wie bei der Abschätzung (5.3.18) für die Methode des schnellsten Abstiegs muß aber auch hier betont werden, daß (5.3.23) eine obere Schranke darstellt, welche unabhängig von der Kenntnis der Grenzen des Spektrums stets gewährleistet ist, während sie beim *Wiardaschen* Verfahren nur garantiert werden kann, wenn man  $\beta$  nach (5.2.15) aus den bekannten Grenzen des Operatorspektrums berechnet. Im Gegensatz zu der Methode des schnellsten

Abstiegs nehmen bei der Methode der kleinsten Restnorm die Normen der Roh-Reihenglieder monoton ab; der Ausdruck (5.3.7) nimmt ebenfalls bei jedem Schritt ab, wenn auch nicht so stark wie bei der Methode des schnellsten Abstiegs. Denn auch bei der Methode der kleinsten Restnorm bewegt man sich bei jedem Schritt auf dem Gradienten des Energieausdrucks (5.3.7), und zwar stets in Richtung abnehmender potentieller Energie, da  $b_n$  nach Abb. 5.3.3 für einen positiv definiten Operator  $\mathcal{L}$  nicht negativ werden kann.

Hat der Operator  $\mathcal{L}$  ein reines Punktspektrum mit nur zwei Eigenwerten  $k$  und  $K$ , so läßt sich wie bei der Methode des schnellsten Abstiegs zeigen, daß das Roh-Reihenglied  $R^{n+2*}$  ein skalarer Bruchteil des Roh-Reihenglieds  $R^{n*}$  sein muß (Abb. 5.3.5). Die Koeffizienten  $b_n$  zeigen also in diesem Fall auch

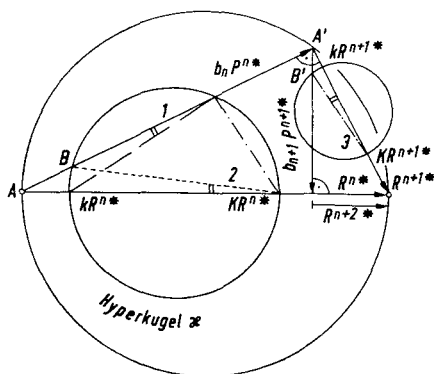


Abb. 5.3.5. Zwei aufeinanderfolgende Schritte nach der Methode der kleinsten Restnorm, falls das Operatorspektrum nur zwei Eigenwerte besitzt.

Die Winkel 1 und 2 sind gleich nach dem Umfangswinkelsatz, die Winkel 1 und 3, weil ihre Schenkel jeweils aufeinander senkrecht stehen. Beachtet man noch die Gleichheit entsprechender Streckenverhältnisse, so erkennt man, daß die Dreiecke  $(A, B, K R^{n*})$  und  $(A', B', K R^{n+1*})$  ähnlich sind

eine Periodizität mit 2. Man erhält jetzt das Roh-Reihenglied  $R^{n+2*}$  als Hypotenusenabschnitt in dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten  $b_n P^{n*}$  und  $R^{n+1*}$  und der Hypotenuse  $R^{n*}$ . Dies folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $(A, B, K R^{n*})$  und  $(A', B', K R^{n+1*})$  (vgl. den Text von Abb. 5.3.5) und der daraus abzulesenden Gleichung

$$\angle (R^{n*}, P^{n*}) = \angle (P^{n+1*}, R^{n+1*}) \quad (5.3.24)$$

sowie der Überlegung, daß auch  $b_{n+1} P^{n+1*}$  und  $R^{n+2*}$  die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse  $R^{n+1*}$  sein müssen. Die Konvergenz wird offenbar um so besser, je kleiner dieser Winkel ist. Die schlechteste in diesem Fall mögliche Konvergenz erhält man demnach, wenn wie in Abb. 5.3.4 der Funktionenvektor  $P^{n*}$  gerade die Hyperkugel  $\mathcal{K}$  berührt. Dann gilt in (5.3.23) genau das Gleichheitszeichen.

### 5.3.C. Diskussion beider Methoden.

Es steht außer Frage, daß die beiden unter dieser Ziffer behandelten Verfahren der *Wiardaschen* Iteration zumindest auf lange Sicht überlegen sind, wenn man nur — ohne Rücksicht auf den Rechenaufwand — die Wirksamkeit des einzelnen Iterationsschritts betrachtet. Denn selbst wenn es beim *Wiardaschen* Iterationsverfahren gelingt, durch die richtige Wahl der Konstanten  $\beta$

die Gültigkeit der Abschätzung (5.2.16) zu sichern, so stellt diese doch eine obere Grenze dar, welcher die Verhältnisse aufeinanderfolgender Restnormen im Laufe des Verfahrens tatsächlich zustreben. Bei den Methoden des schnellsten Abstiegs und der kleinsten Restnorm dagegen bedeuten die Abschätzungen (5.3.18) und (5.3.23) obere Schranken, welche wohl nur in Sonderfällen tatsächlich erreicht werden. Auf der anderen Seite wird beim numerischen Rechnen der Rechenaufwand für jeden einzelnen Schritt dieser beiden Methoden reichlich um die Hälfte erhöht durch die zur Bildung der Skalarprodukte erforderliche Anwendung des Operators  $U^\circ$  auf eine Kräftebelegung. Es ist also auf jeden Fall zu prüfen, ob die mit diesen Verfahren erzielte Verbesserung den vermehrten Rechenaufwand lohnt.

Nun sind die Konvergenzabschätzungen (5.3.18) und (5.3.23) beide von derselben Ordnung; die Wirksamkeit beider Verfahren wird sich also nicht um Größenordnungen unterscheiden; tatsächlich hängt es von Einzelheiten des Operatorspektrums ab, welches der beiden Verfahren sich besser bewährt. Zunächst ist von der Methode des schnellsten Abstiegs bekannt, daß sie zum „Überschießen“ neigt, d. h. daß die Koeffizienten  $a_n$  zuweilen größer ausfallen als für den Fortgang des Iterationsverfahrens nützlich ist ([69], S. 168). Diese schlechte Eigenschaft der Methode des schnellsten Abstiegs wird bei der Methode der kleinsten Restnorm zumindest wesentlich abgemildert, wie man durch Vergleich von Abb. 5.3.1 und Abb. 5.3.3 leicht erkennt. Die Abschätzung (5.3.19) läßt sich damit ergänzen zu

$$\frac{1}{K} \leq b_n \leq a_n \leq \frac{1}{k} \quad *) \quad (5.3.25)$$

An dieser Verminderung des Überschießens liegt es, wenn die Methode der kleinsten Restnorm im Beispiel von Abb. 5.3.2 und Abb. 5.3.5 um so viel besser abschneidet. Weiß man also, daß sämtliche Eigenwerte nur in einer relativ kleinen Umgebung zweier Häufungspunkte liegen, so ist die Methode der kleinsten Restnorm der Methode des schnellsten Abstiegs vorzuziehen. Auf der anderen Seite gibt *Durand* ([144], Bd. II, S. 132) als Beispiel ein Gleichungssystem mit 9 Unbekannten, bei dem die Methode der kleinsten Restnorm etwas schlechter (43 Schritte) abschneidet als die Methode des schnellsten Abstiegs (38 Schritte), und beide Methoden wesentlich schlechter als das *Gauß-Seidel*-Verfahren (27 Schritte), ein Verhalten, das für die Beispiele von Abb. 5.3.2 und Abb. 5.3.5 sicher nicht zutrifft. Offenbar liegt dies daran, daß in diesem Beispiel die Eigenwerte nicht auf die nächste Umgebung zweier Punkte konzentriert sind, sondern sich einigermaßen gleichmäßig über ein Intervall der reellen Achse verteilen, wie die von *Langemeyer*\*\*) nach dem *Jacobischen* Rotationsverfahren [149] berechneten Werte von Tab. 5.3.1 zeigen. In einem von *Faddejew* und *Faddejewa* ([151], Kap. VII, § 71) angegebenen Beispiel schneiden beide Verfahren gleich ab.

\*) Ein einfacher rechnerischer Beweis auf Grund der *Schwarzschen* bzw. *Cauchy-Bunjakowskischen* Ungleichung (2.3.10) findet sich in ([151], Kap. VII, § 72, Gl. (5)).

\*\*) Der Verfasser dankt Herrn *Langemeyer* sehr herzlich für die Durchführung der Rechnung nach dem in der Arbeit von *Falk* und *Langemeyer* [149] beschriebenen und seither von ihm weiter verbesserten maschinellen Programm.

a) Das Gleichungssystem von *Durand*:

$$\begin{array}{cccccccccccl}
 4 & -1 & 0 & -1 & & & & & & & = 1 \\
 -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & & & & & & = 0 \\
 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & & & & & = 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & & & & = 0 \\
 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & & & = 0 \\
 & & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & & = 0 \\
 & & & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & & = 0 \\
 & & & & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & & = 0 \\
 & & & & & -1 & 0 & -1 & 4 & & = 0
 \end{array}$$

b) Die Eigenwerte der Gleichungsmatrix nach *Langemeyer*:

Eigenwert:	Vielfachheit:
1,171 <sub>5</sub>	1
2,586	2
4,000	3
5,414	2
6,828	1
	<hr/> 9

Tab. 5.3.1: Ein Rechenbeispiel

Man macht sich dieses unterschiedliche Verhalten leicht anschaulich plausibel am Bilde der „Konvergenzparabel“, d. h. einer Kurve im Funktionenraum (Zustandsraum  $S$ ), auf der die einzelnen Näherungen einer gewöhnlichen Iteration liegen. Zweckmäßigerweise schreibt man dazu den Ausdruck (5.3.7) mit  $R = [R]^n$  auf die negativen Fehler

$$T^n = [R] - [R]^n \quad (5.3.26)$$

um; im Falle eines reinen Punktspektrums bedeutet dies, daß man den Koordinatenursprung des Zustandsraums  $S$  in den Mittelpunkt der Hyperellipsoide (5.3.7), also auf die gesuchte Lösung legt. Nun kann man eine beliebige Kräftebelegung  $R$  nach den normierten Eigenfunktionen  $\overset{<i>}{R}$  des Operators  $\mathcal{L}$  entwickeln (vgl. § 4.3); wir schreiben dies in der Form

$$R = \sum_i \overset{<i>}{r_i} \overset{<i>}{R} \triangleq (r_i) \quad (5.3.27)$$

Dies entspricht den Koordinaten des elastischen Zustandes im *Cartesischen* System der Hyperellipsoid-Hauptachsen im Zustandsraum  $S$ ; auf jeder dieser Hauptachsen schreitet das gewöhnliche Iterationsverfahren (4.1.21) nach einer geometrischen Progression fort mit dem Faktor

$$\mu_i = 1 - \alpha_i \quad (5.3.28)$$

Daraus leitet man für die negativen Fehler (5.3.26) leicht ab

$$T^n \triangleq (t_i)^n = (\mu_i t_i)^{n-1} = (\mu_i^n t_i)^0 \quad (5.3.29)$$

Nun konstruieren wir die Projektion der Konvergenzparabel auf die Ebene zweier beliebig herausgegriffener Eigenfunktionen  $\overset{<i>}{R}$  und  $\overset{<j>}{R}$  mit den Eigen-

werten  $\mu_i$  und  $\mu_j$  des Operators  $E - \mathcal{L}$ , indem wir aus den entsprechenden Komponenten von (5.3.29) den Exponenten  $n$  eliminieren; wir erhalten so die Parabel

$$t_j = \text{const. } t_j' \quad (5.3.30)$$

mit dem im allgemeinen gebrochenen und für  $0 < m \leq \mu_i, \mu_j \leq M < 1$  positiven Exponenten

$$\gamma = \frac{\ln \mu_j}{\ln \mu_i} \quad (5.3.31)$$

Die Gesamtheit dieser Projektionen bestimmt eine Kurve im Zustandsraum  $S$ , nämlich die Konvergenzparabel\*). Durch jeden Punkt des Zustandsraums  $S$  geht genau eine derartige Kurve. Enthält das Spektrum von  $E - \mathcal{L}$  ein Kontinuum (vgl. § 2.4—5), so kann man wenigstens jedem Paar sich nicht überschneidender Intervalle des Spektrums in der Projektion ein Gebiet zwischen zwei Konvergenzparabeln zuordnen, welche um so näher zusammenrücken, je kleiner man die beiden Intervalle macht.

In Abb. 5.3.6 haben wir nun eine Konvergenzparabel für den speziellen Fall eines Punktspektrums mit genau zwei Eigenwerten  $m = 1 - K$  und  $M = 1 - k$  aufgezeichnet und in der Abb. sowohl die gewöhnliche Iteration als auch die

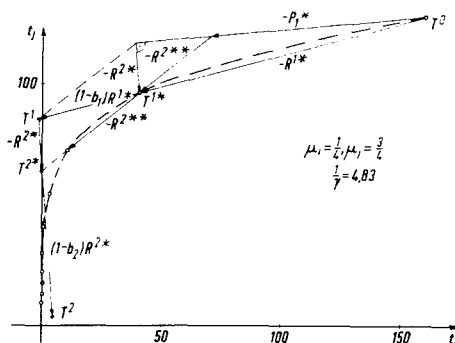


Abb. 5.3.6. Konvergenzparabel und Konvergenzverbesserung für zwei Eigenfunktionen

Methode der kleinsten Restnorm eingetragen. Man sieht, daß die Koeffizienten  $b_n$  an den Stellen stärkster Krümmung der Konvergenzparabel besonders klein werden, und ähnliches gilt, wenn auch nicht ganz in demselben Maße, für die Methode des schnellsten Abstiegs. Die Wirksamkeit der — im gezeichneten Falle weit überlegenen — Methode der kleinsten Restnorm beruht aber auf den Schritten mit großem Koeffizienten  $b_n$ , wie etwa dem Schritt von  $T^1$  nach  $T^2$  im gezeichneten Beispiel. Stellt nun Abb. 5.3.6 nicht mehr die tatsächliche Konvergenzparabel im Falle zweier Eigenwerte dar, sondern nur noch ihre Projektion im Falle einer größeren Zahl von Eigenwerten, so werden die Krümmungsmaxima für jedes verschiedene Paar von Eigenwerten

\*) Diese Konvergenzparabeln sind nicht zu verwechseln mit den Orthogonaltrajektorien der Niveauflächen oder „Kurven schnellsten Abstiegs“ ([151], Kap. VII; [157]), bei denen  $\kappa_j/\kappa_i$  an die Stelle von  $\gamma$  tritt.



an einer anderen Stelle auftreten. Wenn aber auf der Konvergenzparabel durch  $T^1$  in einer der unendlich vielen anderen Ebenen des Zustandsraums  $S$  ein Krümmungsmaximum in der Nähe von  $T^1$  liegt, so fällt der Koeffizient  $b_2$  sofort wesentlich kleiner aus. Dadurch wird die Wirksamkeit des Verfahrens mehr oder weniger verschlechtert. Ähnliches gilt, wenn auch nach dem bei *Durand* angegebenen Beispiel von Tab. 5.3.1. nicht immer in demselben Maße, für die Methode des schnellsten Abstiegs.

Man wird also die Diskussion so zusammenfassen können, daß die Methode des schnellsten Abstiegs und noch mehr die Methode der kleinsten Restnorm dann besonders wirksam sind, wenn die Konvergenzparabel nur wenige, durch relativ lange, schwach gekrümmte Abschnitte getrennte Krümmungsmaxima besitzt, d. h. wenn sich das Spektrum des Operators  $\mathcal{L}$  bzw.  $E - \mathcal{L}$  auf ganz wenige, relativ kleine Intervalle beschränkt. Ist dies nicht der Fall, so wird wohl wie in dem von *Durand* angegebenen Beispiel, die Methode des schnellsten Abstiegs meist weniger betroffen werden als die Methode der kleinsten Restnorm, so daß die Methode des schnellsten Abstiegs in solchen Fällen noch etwas günstiger abschneiden kann. Sehr wirksam sind aber diese Methoden dann alle beide nicht mehr, und der Erfolg entspricht nicht mehr dem erforderlichen Rechenaufwand.

Aber selbst im günstigsten Fall, nämlich bei einem Spektrum mit genau zwei Eigenwerten, vermag das Verhalten der Verfahren mit einem einzigen Konvergenzverbesserungs-Koeffizienten nicht recht zu befriedigen, wie die aus Abb. 5.3.2 und Abb. 5.3.5 abgeleitete Periodizitätseigenschaft zeigt. Man kann daraus schließen, daß diese Verfahren die mit den vorangegangenen Iterationsschritten gewonnene Information über den Operator  $\mathcal{L}$  keineswegs in dem praktisch wünschenswerten Maße ausnützen. Denn ein nur wenig beweglicheres Konvergenzverbesserungsverfahren würde beim ersten Auftreten zweier nur durch einen Skalarfaktor unterschiedener Reste nach dem Prinzip der geometrischen Reihe weiter extrapolieren und die Lösung der Operatorgleichung mit dem nächsten Schritt beenden. Wir wenden uns daher in den nächsten Ziffern den Konvergenzverbesserungsverfahren mit mehr als einem veränderlichen Koeffizienten zu.

Wegen weiterer Verallgemeinerungen der Methoden mit einer festen Zahl veränderlicher Koeffizienten verweisen wir auf das Buch von *Faddejew* und *Faddejewa* ([151], Kap. VII) und insbesondere auf die im Anschluß an Satz 72.1 in § 72 gegebene Abschätzung. Danach fällt die Konvergenzabschätzung bezüglich des Ausdrucks (5.3.10) am besten aus für die Methode des schnellsten Abstiegs. Daß dies nicht in jedem Einzelfall gleichbedeutend sein muß mit dem günstigsten Konvergenzverhalten, zeigt ein Vergleich von Abb. 5.3.2 und Abb. 5.3.5.

#### 5.4 Ein Verfahren mit zwei veränderlichen Koeffizienten (*Hestenes-Stiefel*)

Bereits durch Einführung eines weiteren Freiheitsgrades gelang es *Hestenes und Stiefel*, die Methode des schnellsten Abstiegs so zu verbessern, daß das Verfahren — abgesehen von Rundungsfehlern — nach höchstens  $N$  Schritten zur exakten Lösung führt, falls das Operatorspektrum genau  $N$  Eigenwerte ent-

hält [31, 62, 68, 69, 144]. Das auf S. 293 zitierte Beispiel von *Durand* ([144], Bd. II, S. 132) wird nach dieser Methode in 7 Schritten gelöst; das Verfahren zeigt sich dem Zeitaufwand nach selbst bei dem relativ kleinen Gleichungssystem mit 9 Unbekannten nur noch den direkten Methoden unterlegen.

Wir skizzieren das Prinzip dieses Verfahrens im Anschluß an die geometrisch-anschauliche Herleitung bei *Bodewig* ([69], S. 173), verweisen jedoch wegen Einzelheiten auf die Literatur [31, 62, 68, 69, 144]. Bei unseren halbanschaulichen Überlegungen setzen wir die Existenz eines reinen Punktspektrums voraus, weisen jedoch darauf hin, daß das Verfahren auch für beliebige eigentlich positiv definite und symmetrische Operatoren mit kontinuierlichem Spektrum begründet werden kann [62]. Wie bei der Methode des schnellsten Abstiegs gehen wir aus von der potentiellen Energie (5.3.7) und suchen sie im Verlaufe der Iteration möglichst klein zu machen. Während man aber bei der Methode des schnellsten Abstiegs die Schar der Hyperellipsoide (5.3.7) im Zustandsraum  $S$  nur mit einer einzigen Geraden in Richtung des Gradienten durch den Ausgangspunkt schneidet und auf dieser das Minimum der potentiellen Energie (5.3.7), also den Berührungspunkt mit einem Hyperellipsoid der Schar aufsucht, schneidet man diese Schar bei Verfahren von *Hestenes* und *Stiefel* mit einer Ebene durch den Ausgangspunkt des Iterationsschrittes. Und zwar wählt man speziell die Ebene, welche einerseits vom Gradienten im Ausgangspunkt, andererseits von dem Funktionsvektor der vorangehenden Verbesserung aufgespannt wird. Diese „Testebene“ schneidet nun die Gesamtheit aller Hyperellipsoide in einer Schar konzentrischer Ellipsen. Der Grundgedanke des Verfahrens von *Hestenes* und *Stiefel* besteht nun darin, den gemeinsamen Mittelpunkt aller dieser Schnittelellipsen aufzusuchen; es ist zugleich derjenige Punkt der Testebene, in welchem der Energieausdruck (5.3.7) seinen kleinsten Wert annimmt und der Berührungspunkt der Testebene mit einem Hyperellipsoid der Schar (5.3.7).

Die Verbesserungen bei jedem Schritt liegen also wie bei der Methode des schnellsten Abstiegs in der Tangentenebene des Hyperellipsoids durch den nächsten Näherungspunkt; aber sie stehen im allgemeinen nicht mehr senkrecht auf dem Hyperellipsoid durch den Ausgangspunkt. Dagegen stehen sämtliche Reste aufeinander senkrecht, worauf sich die eingangs erwähnte Eigenschaft des Verfahrens gründet, nach  $N$  Schritten zur exakten Lösung zu führen. Auch die jeweiligen Testebenen stehen aufeinander senkrecht. Der Mittelpunkt der Ellipsenschar in einer Testebene wird aus dem Schnitt zweier konjugierter Durchmesser bestimmt; das Verfahren wird daher auch oft als die Methode der konjugierten Gradienten (cg-Methode) bezeichnet. Wir verzichten darauf, dies im einzelnen auszuführen und begnügen uns damit, die bei *Bodewig* ([69], S. 175) angegebene Iterationsvorschrift nach den Übersetzungsregeln (5.3.1–5) auf die Kräftebelegungen  $R$  und die Verschiebungen  $w$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  zu übertragen. Des besseren Vergleichs wegen schließen wir uns auch in der Formelbezeichnung durch Buchstaben an *Bodewig* an.

Sei also  $[P]$  die gegebene Belastung auf  $(S)$  und

$$[u] = U^\circ [P] \quad (5.4.1)$$

die zugehörige Verschiebung auf  $(S)$  in  $K^\circ$ . Wir wählen eine Ausgangsnäherung

$$[w]^0 = U^\circ [R]^0 \quad (5.4.2)$$

und führen im Laufe des Verfahrens noch eine Folge von Hilfsfunktionen

$$f^n = U^\circ F^n \quad (5.4.3)$$

sowie die Konstanten  $A_n$  und  $\Omega_n$  ein. Dann entspricht der erste Schritt der Methode des schnellsten Abstiegs:

$$\begin{aligned} F^1 &= R^{1*} = [P] - \mathcal{L} [R]^0 \\ f^1 &= w^{1*} = U^\circ R^{1*} \quad (= [u] - [w]^0 \mathcal{L}) \end{aligned} \quad (5.4.4a)$$

und daraus

$$\begin{aligned} [R]^1 &= [R]^0 + A_1 R^{1*} \\ [w]^1 &= [w]^0 + A_1 w^{1*} \end{aligned} \quad (5.4.4b)$$

mit

$$A_1 = \frac{\{w^{1*}, R^{1*}\}}{\{w^{1*}, \mathcal{L} R^{1*}\}} \quad (5.4.4b')$$

Alle weiteren Iterationsschritte laufen nun nach dem folgenden Schema ab:

$$\begin{aligned} R^{2*} &= R^{1*} - A_1 \mathcal{L} F^1 \quad (= [P] - \mathcal{L} [R]^1) \\ w^{2*} &= U^\circ R^{2*} \quad (= w^{1*} - A_1 f^1 \mathcal{L} = [u] - [w]^1 \mathcal{L}) \end{aligned} \quad (5.4.4c)$$

Nun wird die neue Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} F^2 &= R^{2*} + \Omega_2 F^1 \\ f^2 &= w^{2*} + \Omega_2 f^1 \end{aligned} \quad (5.4.4d)$$

mit

$$\Omega_2 = \frac{\{w^{2*}, R^{2*}\}}{\{w^{1*}, R^{1*}\}} \quad (5.4.4d')$$

berechnet. Daraus folgt die nächste Näherung

$$\begin{aligned} [R]^2 &= [R]^1 + A_2 F^2 \\ ([w]^2 &= [w]^1 + A_2 f^2) \end{aligned} \quad (5.4.4e)$$

mit

$$A_2 = \frac{\{f^2, R^{2*}\}}{\{f^2, \mathcal{L} F^2\}} = \frac{\{w^{2*}, R^{2*}\}}{\{f^2, \mathcal{L} F^2\}} \quad *) \quad (5.4.4e')$$

Die folgenden Schritte ergeben sich aus (5.4.4c-e') jeweils durch Erhöhung sämtlicher Indizes um Eins.

Der Rechenaufwand ist im wesentlichen durch die Operationen  $\mathcal{L} F^{n-1}$  und  $U^\circ R^{n*}$  in (5.4.4e', c) bestimmt; alles andere sind Vektoradditionen und

\*) Die zweite Form (vgl. [62], Gl. (29), S. 61) folgt mit (4.4d) wegen  $\{f^1, R^{2*}\} = 0$ .

Skalarprodukte, die bei numerischer Rechnung verhältnismäßig wenig Rechenzeit verbrauchen, verglichen mit den umfangreichen Matrizenmultiplikationen bei der Anwendung der Operatoren  $\mathcal{L}$  und  $U^\circ$ . Ein Iterationsschritt benötigt also kaum mehr Rechenzeit als bei den Verfahren von § 5.3 mit einem veränderlichen Koeffizienten. Allerdings kommen die gegebenen Ausgangswerte  $[P]$  nach dem ersten Iterationsschritt nicht mehr in der weiteren Rechnung vor, was eine starke Anfälligkeit des Verfahrens gegen Rundungsfehler zu bedingen scheint. Es besteht jedoch immer die Möglichkeit eines Rückgriffs auf die Ausgangswerte, wenn man von Zeit zu Zeit die erste Gleichung (5.4.4c) durch ihre eingeklammerte Form ersetzt. Allerdings wird dabei jedesmal der Rechenaufwand um eine Anwendung des Operators  $\mathcal{L}$  erhöht.

Nach Rechenversuchen von *Engeli*, *Ginsburg*, *Rutishauser* und *Stiefel* an einem umfangreichen Gleichungssystem ist jedoch dieser Rückgriff auf die Ausgangswerte nicht zu empfehlen ([31], § III, 3.7, S. 67); nach den von diesen Autoren erzielten Ergebnissen wird dadurch die Konvergenz nur verschlechtert. Überhaupt zeigt das praktische Konvergenzverhalten der cg-Methode in diesen Rechenbeispielen eine unerwartete, aber höchst bemerkenswerte Eigentümlichkeit. Es ist bekannt, daß dieses Verfahren besonders bei umfangreichen Gleichungssystemen infolge der angesammelten Rundungsfehler nach der theoretischen Anzahl von  $N$  Schritten keineswegs bei der exakten Lösung ankommt, sondern im Gegenteil noch sehr erhebliche Fehler aufweisen kann, weshalb *Zurmühl* [68] eine anschließende Fortsetzung der Iteration nach dem *Gauß-Seidelschen* Verfahren empfiehlt. Auch *Engeli* und Mitarbeiter beobachten diese bekannte Erscheinung, setzen aber die Iteration über die theoretische Zahl von Iterationsschritten hinaus fort. Und nun zeigt sich eigentümlicherweise, daß erst nach einer oft recht wesentlichen Überschreitung der theoretischen Zahl von Iterationsschritten die konvergenzbeschleunigende Wirkung der cg-Methode voll einsetzt. Besonders ausgeprägt ist dies für ein extrem schlecht bestimmtes Gleichungssystem von 44 Unbekannten, bei dem der Fehler über 150 Iterationsschritte kaum abnimmt, dann aber in wenigen Schritten um mehrere Zehnerpotenzen fällt. Eine theoretische Erklärung für dieses eigentümliche Verhalten scheint bisher nicht bekannt zu sein.

Wegen weiterer Verbesserungen und Einzelheiten (z. B. die Verbindung mit einer Spektraltransformation in der cgT-Methode oder die gleichzeitige Bestimmung der Eigenwerte) sei auf die Literatur und speziell [31] verwiesen. Hat man mehrere Belastungsfälle am selben Realkörper zu untersuchen, so kann man Gebrauch davon machen, daß das Verfahren mit den Roh-Reihengliedern (5.4.4c) eine Folge von Funktionen erzeugt, die im Sinne des Skalarprodukts (5.1.5) des Zustandsraums  $S$  orthogonal sind. Normiert man sie im Sinne (4.3.5–6), so kann man mit ihrer Hilfe Ausgangsnäherungen für weitere Belastungsfälle durch Reihenentwicklung bestimmen und dadurch das Verfahren abkürzen. Einzelheiten sind — im Rahmen der Matrizenrechnung — in dem Buch von *Faddejew* und *Faddejewa* ([151], Kap. VI, §§ 63, 64) beschrieben.

Noch günstiger für diesen Zweck ist aber die Verwendung der Funktionen  $F''$  bzw.  $f''$  nach (5.4.4d) ([151], Kap. VI, §§ 65–69; [62], S. 60; [69], S. 176;

[158]); diese Funktionen sind untereinander „*Bergman*-orthogonal“ oder „ $\mathcal{L}$ -orthogonal“ [62, 151, 158] oder „bezüglich  $\mathcal{L}$  konjugiert“ [69]. Wir werden – an Hand von ([151], Kap. VI; [158]) – noch ausführlich auf den Zusammenhang zwischen dem *Hestenes-Stiefel*-Verfahren einerseits und der Verbindung von Iteration und *Bergmanscher* Reihenentwicklung andererseits zurückkommen.

Wir bemerken noch zur Terminologie, daß die Begriffe „*Bergman*-orthogonal“ und „ $\mathcal{L}$ -orthogonal“ insofern verschieden sind, als sich der erste auf das vorliegende Randwertproblem bezieht, der zweite aber auf beliebige positiv definite Operatoren angewandt werden kann. Der erste Begriff läßt sich also unmittelbar physikalisch deuten, der zweite ist rein mathematisch definiert. Da wir uns jedoch in diesem Paragraphen im wesentlichen nur mit den im Sinne von § 4 durch ein Randwertproblem definierten Operatoren  $\mathcal{L}$  befassen, werden wir beide Begriffe gleichberechtigt verwenden. Wir werden auch wie bisher den Unterschied zwischen dem exakten Operator  $\mathcal{L}$ , wie er bei halbnumerischer Rechnung (§ 5.1) auftreten kann, und seiner finiten Näherungsmatrix nicht ausdrücklich hervorheben, wo keine Mißverständnisse zu befürchten sind. Die meisten Aussagen gelten gleichzeitig für den exakten Operator und seine finite Näherungsmatrix streng; in anderen Fällen ist der Näherungscharakter bei Anwendung auf das finite Gleichungssystem so evident, daß wir nicht besonders darauf hinzuweisen brauchen (z. B. die Annäherung der Häufungspunkte des exakten Operatorspektrums durch die finite Ersatzmatrix). Ebenso evident ist auch im Einzelfalle die Übertragbarkeit auf Matrizen oder andere abstrakt definierte Operatoren. Naheliegend ist schließlich auch eine Erweiterung des Begriffs der *Bergman*-Orthogonalität auf die Methoden der sukzessiven Belastung bzw. der sukzessiven Verspannung bei Nichthomogenitätsproblemen nach § 3.5 bzw. § 3.6. Man hat einfach in den Ansatzfunktionen auch Kräftebelegungen bzw. Eigenspannungsquellen im Innern zuzulassen und zu verlangen, daß für zwei – im erweiterten Sinne – *Bergman*-orthogonale Zustände das Skalarprodukt (3.5.14) bzw. (3.6.14) verschwindet [159].

## 5.5 Verfahren mit ansteigender Koeffizientenzahl

### 5.5.A. Die Momentenmethode [62].

Die theoretisch beste Ausnützung der durch die vorangegangenen Iterationsschritte gewonnenen Information über die vorgelegte Operatorgleichung hat man bei Verwendung sämtlicher vorangehender Näherungen zur Bestimmung der nächsten Näherung. Dies kann etwa dadurch geschehen, daß man den gegebenen Operator  $\mathcal{L}$  auf den durch die bisher gewonnenen iterierten Funktionen aufgespannten endlich-dimensionalen Unterraum des Zustandsraums projiziert und für den so gewonnenen projizierten Operator die gegebene Gleichung exakt löst, was wegen der endlichen Dimensionenzahl dieses Unterraums stets möglich ist. Man kann sich die Projektion eines Operators unmittelbar anschaulich machen mit Hilfe der Hyperellipsoide (5.3.7), welche in ihrer Gesamtheit den Operator  $\mathcal{L}$  vollständig bestimmen. Hat man etwa nur eine Funktion zur Verfügung, so besteht der Unterraum der Iterierten nur aus

einer Geraden, und die Projektion des Operators wird durch die Punktepaare repräsentiert, in welchen diese Gerade die einzelnen Hyperellipsoide der Schar schneidet. Der Lösung des Gleichungssystems im Unterraum der Iterierten besteht jetzt nur im Aufsuchen der Mitte der Punktepaare. Dies ist die Methode des schnellsten Abstiegs. Hat man zwei Iterierte, so bestimmen diese eine Ebene, in der man den Mittelpunkt der Schnittelellipsen bestimmt usw.

Wir gehen hier nicht auf Einzelheiten ein, sondern verweisen auf die Monographie von Worobjow [62], in der auch die Konvergenz der projizierten Operatoren gegen den Operator  $\mathcal{L}$  nachgewiesen wird. Die Lösung einer inhomogenen Gleichung mit dem auf den Unterraum der ersten  $n$  Iterierten projizierten Operator läßt sich zunächst auf die Lösung eines linearen Hilfspgleichungssystems mit  $n$  Unbekannten zurückführen; die Zahl dieser Hilfspgleichungen nimmt also von einem Schritt zum anderen zu, während andererseits aber auch die Iterationsschritte immer wirksamer werden. Eine theoretische Grenze dieses Verfahrens liegt bei einer Zahl von Iterationsschritten, die gleich der Zahl der Unbekannten des finiten Ersatzsystems für den gegebenen Operator ist; da sich jedoch alle Eigenwerte des Operators  $\mathcal{L} = \Pi^+ U^\circ$  für eine isotrope Scheibe bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen auf eine gewisse Umgebung der beiden Häufungsstellen konzentrieren, wird man eine brauchbare Annäherung schon nach relativ wenigen Schritten erwarten können. Bei Randwertproblemen an der isotropen Kreisscheibe z. B. muß das Verfahren, entsprechend den drei Eigenwerten nach § 4.3, nach drei Schritten bei der exakten Lösung angelangt sein. Bei anderen Scheibenformen wird man für eine brauchbare Annäherung um so mehr Schritte benötigen, je mehr sie von der Kreisscheibenform abweichen.

Führt die Momentenmethode in dieser Form nicht rasch genug zum Ziel, so kann man die Zahl der Hilfspgleichungen nach oben begrenzen und die Momentenmethode als ein Konvergenzverbesserungsverfahren mit einer größeren Zahl freier Koeffizienten betrachten ([62], § IV, 2; [151]). Die Lösung etwa von 10 Hilfspgleichungen mit 10 Unbekannten durch direkte Elimination bei jedem Iterationsschritt fällt dem Rechenaufwand nach sicher nicht ins Gewicht, wenn das zu lösende Ersatzgleichungssystem für die Operatorgleichung 100 Unbekannte hat. Worobjow empfiehlt an dieser Stelle zur Erhöhung der Genauigkeit Orthogonalisierung der benutzten Verbesserungen; sie läßt sich leicht auf die Kräftebelegungen  $R^n$  und das Skalarprodukt (5.1.5) im Zustandsraum  $S$  übertragen.

Besonders interessant ist das Verhalten dieser Näherungsmethode, wenn sich die Operatorgleichung auf die Form

$$(E - \mathcal{A})[R] = [F] \quad (5.5.1)$$

bringen läßt, wo die rechte Seite gegeben und  $\mathcal{A}$  ein vollstetiger Operator ist. Dies läßt sich bei isotropen Scheiben nach Miche-Weinel durch die Wahl der Querkontraktionszahl  $\mathcal{M} = 1$  und gleichzeitige Abtrennung aller mit einer allseitigen Kompression oder Dilatation verbundenen Belastungen erreichen (§ 4.5), oder durch nachträgliche Regularisierung nach (4.4.84). Bei der Regularisierung nach (4.4.84) wird es sich übrigens des großen Rechenaufwandes wegen normalerweise nicht empfehlen, das Operatorprodukt

$(\Pi - U^\circ)(\Pi + U^\circ)$  in den Ersatzmatrizen tatsächlich auszuführen; falls man nicht eine sehr große Zahl von Randwertaufgaben für dieselbe Scheibe zu lösen hat, ist es zweckmäßiger, die beiden Operatoren abwechselnd auf eine Kräftebelegung anzuwenden. Vermutlich wird eine Regularisierung dieser Art auch bei anisotropen Scheiben möglich sein, doch ist zu erwarten, daß dann die Zahl  $\gamma$  in (4.4.84) von der Bereichsform abhängt.

Hat man nun die Operatorgleichung auf die Form (5.5.1) zurückgeführt, so werden nach ([62], S. 74) mit wachsender Zahl der Hilfgleichungen die Konvergenzeigenschaften durch die Eigenwerte des Operators  $\mathcal{A}$  in der Reihenfolge abnehmender Beträge bestimmt; der Konvergenzfaktor strebt also wegen der Vollstetigkeit von  $\mathcal{A}$  gegen Null. Nun bedeutet die Regularisierung eine Spektraltransformation des Operators  $\mathcal{L} = \Pi + U^\circ$ , bei der man die beiden den Eigenwerten der Halbebene entsprechenden Häufungspunkte (vgl. § 4.3) zusammenlegt und die Multiplikation mit einer Konstanten abtrennt. Entsprechendes gilt für das *Miche-Weinelsche* Verfahren im isotropen Fall. Gleichzeitig werden die zugehörigen Eigenfunktionen mit der Annäherung der Eigenwerte an den Häufungspunkt den Eigenfunktionen der Halbebene und damit auch der Kreisscheibe immer ähnlicher; umgekehrt wird der Operator  $\mathcal{A}$  um so mehr und um so stärker von Null abweichende Eigenwerte aufweisen, je mehr die betrachtete Scheibe von der Kreisform abweicht. Wie man sich nach Abb. 4.2.1 anschaulich plausibel machen kann, sind die größeren Eigenwerte von  $\mathcal{A}$  bei denjenigen Kräftebelegungen zu suchen, die sich auf  $(S)$  relativ langsam ändern, nur wenige Vorzeichenwechsel aufweisen und somit am stärksten durch die spezielle Form der Scheibe bestimmt werden; die kleinen Eigenwerte dagegen gehören zu rasch oszillierenden Kräftebelegungen, deren Spannungsfelder bereits in einem im Vergleich zum Krümmungsradius kleinen Abstand von  $(S)$  fast völlig abgeklungen sind. Die Konvergenzgeschwindigkeit und die Aufwendigkeit des Verfahrens steht also bei Zurückführung auf eine Gleichung der Form (5.5.1) in direktem Zusammenhang mit der Kompliziertheit der Scheibenform. Damit haben die Methoden der Konvergenzverbesserung offenbar eine „natürliche“ Grenze erreicht.

Schließlich kann man sich bei der Momentenmethode von den Hilfgleichungssystemen auch ganz freimachen, indem man — um den Preis erhöhter Anfälligkeit gegen Rundungsfehler — die benötigten Konstanten und Funktionen rekursiv berechnet. Auf diese Weise gelangt man wieder zum Algorithmus von *Hestenes* und *Stiefel* nach § 5.4 ([62], § III, 4; [151]). Sieht man also von der — nach [31] durch weitere Fortsetzung der Iteration weitgehend auszugleichenden — Anfälligkeit gegen Rundungsfehler ab, so scheint die Methode von *Hestenes* und *Stiefel* das schnellste und „zielsicherste“ Konvergenzverbesserungsverfahren in einem *Hilbert-Raum* zu sein. Bei halbnumerischer Rechnung fallen die Bedenken wegen der Rundungsfehler weg; in diesem Falle kommen also die Vorteile der cg-Methode voll zur Auswirkung.

Zusammenfassend können wir also feststellen, daß man durch Verbindung von Regularisierung und der Methode von *Hestenes* und *Stiefel* wohl das theoretisch mögliche Optimum an Genauigkeit und Schnelligkeit der Rechnung erreichen wird; die Anfälligkeit gegen Rundungsfehler dürfte sich, wenn über-

haupt, nach [31] nur in sehr extremen Fällen störend auswirken. Eine offene Frage dagegen ist, wie weit die Vorteile der Momentenmethode auch ohne Regularisierung zur Geltung kommen; man hätte dies an Hand der Abschätzung ([62], § III, 4, Gl. (31), S. 62) nachzuprüfen\*). Nach [31] kann sich jedoch eine Spektraltransformation vorteilhaft auf die Konvergenz des *Hestenes-Stiefel*-Verfahrens auswirken (cgT-Methode); da nun die Regularisierung nach ([62], S. 74) wohl das Optimum einer Spektraltransformation im Hinblick auf die Konvergenz der Momentenmethode darstellt, darf man also von der Regularisierung wohl immer eine Verbesserung der Konvergenzeigenschaften erwarten.

### 5.5.B. Die erweiterte Methode der kleinsten Restnorm.

Es liegt nahe, den Ansatz (5.3.20) durch Hinzunahme mehrerer im Laufe des Verfahrens bereits aufgetretenen Reihenglieder zu erweitern

$$R^n = (1 + a_n) R^{n*} + \sum_{\kappa=1}^k d_{n\kappa} R^{n-\kappa} \quad (5.5.2)$$

und darin die Konstanten  $a_n, d_{n\kappa}$  so zu bestimmen, daß die elastische Energie des nächsten Roh-Reihengliedes  $R^{n+1*}$  möglichst klein wird. Dazu berechnen wir im Anschluß an § 5.3.B

$$[R]^n = [R]^{n*} + a_n R^{n*} + \sum_{\kappa=1}^k d_{n\kappa} R^{n-\kappa} \quad (5.5.3)$$

$$[R]^{n+1*} = [R]^{n+1**} + a_n R^{n+1**} + \sum_{\kappa=1}^k d_{n\kappa} R^{n-\kappa+1*} \quad (5.5.4)$$

und daraus

$$\begin{aligned} R^{n+1*} &= (1 + a_n) R^{n+1**} - a_n R^{n*} + \sum_{\kappa=1}^k d_{n\kappa} (R^{n-\kappa+1*} - R^{n-\kappa}) \\ &= Q^{n*} - a_n P^{n*} - \sum_{\kappa=1}^k d_{n\kappa} P^{n-\kappa} = Q^n \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Es folgt das Extremalproblem

$$\begin{aligned} \{ (Q^{n*} - a_n P^{n*} - \sum_{\kappa=1}^k d_{n\kappa} P^{n-\kappa}), U^\circ (Q^{n*} - a_n P^{n*} - \sum_{\kappa=1}^k d_{n\kappa} P^{n-\kappa}) \} \\ = \min (a_n, d_{n\kappa}) \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

und durch Ableitung nach  $a_n$  und den  $d_{n\kappa}$  das lineare Gleichungssystem für die gesuchten Konstanten

$$\{ Q^{n*} - a_n P^{n*} - \sum_{\kappa=1}^k d_{n\kappa} P^{n-\kappa}, U^\circ P^{n*} \} = 0$$

\*) Daß die Konzentration der Eigenwerte auf wenige Häufungspunkte das Konvergenzverhalten günstig beeinflußt, läßt sich aus den Überlegungen von *Stiefel* [157] leicht ableiten. Schwieriger ist jedoch eine quantitative Abschätzung.



$$\{Q^{n*} - a_n P^{n*} - \sum_{\kappa=1}^k d_{n\kappa} P^{n-\kappa}, U^\circ P^{n-\kappa}\} = 0 \quad \kappa = 1, \dots, k \quad (5.5.7)$$

mit der symmetrischen Matrix

$$\begin{pmatrix} \{P^{n*}, U^\circ P^{n*}\} & \{P^{n-1}, U^\circ P^{n*}\} & \dots & \{P^{n-k}, U^\circ P^{n*}\} \\ \{P^{n*}, U^\circ P^{n-1}\} & \{P^{n-1}, U^\circ P^{n-1}\} & \dots & \{P^{n-k}, U^\circ P^{n-1}\} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \{P^{n*}, U^\circ P^{n-k}\} & \{P^{n-1}, U^\circ P^{n-k}\} & \dots & \{P^{n-k}, U^\circ P^{n-k}\} \end{pmatrix} \quad (5.5.8)$$

Hier sind bei jedem Iterationsschritt nur die Matrixelemente des linken und oberen Randes neu zu berechnen; die anderen können aus den vorangehenden Iterationsschritten übernommen werden. Sämtliche Hauptabschnittsdeterminanten [68] der Matrix (5.5.8) sind vom *Gramschen* Typ [73]; also ist die Matrix positiv definit und das Gleichungssystem (5.5.7) stets lösbar, so lange das Verfahren nicht abbricht.

Ähnlich wie bei der Momentenmethode kann die Auflösung dieser Hilfsgleichungssysteme durch Orthogonalisierung vereinfacht werden; in diesem Fall unterwirft man zweckmäßigerweise die Kräftebelegungen  $P^r$  einem *Gram-Schmidt*-Prozeß [37, 40, 62, 73] \*). Eine dem *Hestenes-Stiefel*-Verfahren analoge rekursive Methode findet sich in einem erstmals von *Stiefel* [157] beschriebenen und in ([31], § II, 4, S. 35) als *cgl*-Methode bezeichneten Verfahren. Die praktische Erprobung der *cgl*-Methode in [31] ergab eine geringe Unterlegenheit gegenüber der normalen *cg*-Methode. Es ist denkbar, daß eine vergleichende Wertung beider Verfahren ähnlich wie in den einfacheren Fällen von § 5.3 von den Einzelheiten des Operatorspektrums und der gegebenen Belastung abhängt.

### 5.5.C. Verbindung von Iteration und *Bergmanscher* Reihenentwicklung.

Nach *Bergman* [33–39] werden zwei elastische Zustände des Realkörpers  $K^+$  als orthogonal bezeichnet, wenn ihre Wechselwirkungsenergie im Realkörper  $K^+$  verschwindet. Wir wollen diese Orthogonalitätsbedingung durch die zugeordneten, d. h. im Teilbereich  $(K^+)$  verzerrungsgleichen elastischen Zustände des Grundkörpers  $K^\circ$  ausdrücken. Danach bezeichnen wir zwei elastische Zustände  $\hat{g}, \hat{\hat{g}}$  mit den Repräsentationen  $\hat{R}, \hat{\hat{R}}$  und  $\hat{w}, \hat{\hat{w}}$  mit  $\mathcal{L} = \Pi^+ U^\circ$  als *Bergman*-orthogonal — oder, in der Bezeichnungsweise ([62], § III, 4, S. 60), als  $\mathcal{L}$ -orthogonal — wenn sie die Beziehung

$$\{\hat{w}, \mathcal{L} \hat{\hat{R}}\} = \{\hat{w} \mathcal{L}, \hat{\hat{R}}\} = 0 \quad (5.5.9)$$

erfüllen. Ein nach *Bergman* orthonormiertes System von elastischen Zuständen  $g$  mit den Repräsentationen  $R$  und  $w$  des Grundkörpers  $K^\circ$  ist demnach gekennzeichnet durch die Relationen

\*) Über weitere Einzelheiten, insbesondere die Reduktion des *Gram-Schmidt*-Prozesses auf eine dreigliedrige Rekursionsformel, vgl. ([151], Kap. VI, § 63–64; [158]).

$$\{w, \mathcal{L} R\} = \delta_{ij} \quad (5.5.10)$$

Die Größen

$$P^{r*} = \mathcal{L} R^{r*} \quad (5.5.11)$$

lassen sich bei der Iteration (4.1.21) durch einfache Differenzbildung zwischen zwei Kräftebelegungen, also fast ohne zusätzlichen Rechenaufwand, gewinnen: der wesentliche Mehraufwand liegt somit in der Bildung der Skalarprodukte der  $n$ -ten Iterierten mit sämtlichen vorangehenden, bereits orthonormierten Iterierten bei dem *Gram-Schmidt*-Prozeß, welcher nach *Bergman* aus den Iterierten eine Folge im Sinne von (5.5.10) orthogonaler Kräftebelegungen  $R^{(i)}$  mit den zugehörigen Verschiebungen  $w^{(i)}$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$  erzeugt.

Die *Bergmansche* Reihenentwicklung eines beliebigen elastischen Zustandes  $g$  mit den Repräsentationen  $R$  und  $w$  lautet dann, ausgedrückt durch die Kräftebelegungen  $R^{(i)}$  und die Verschiebungen  $w^{(i)}$  auf  $(S)$  in  $K^\circ$ , welche die *Bergman*-orthonormierten Zustände  $g$  des Grundkörpers  $K^\circ$  repräsentieren

$$R = \sum_{i=1}^{\infty} \{w, \mathcal{L} R\} R^{(i)}, \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} \{w, \mathcal{L} R\} w^{(i)} \quad (5.5.12)$$

Diese Entwicklung gilt, wenn  $R$  im Funktionenraum der Iterierten von  $R^{(1)}$  enthalten ist. Setzt man speziell für  $R$  die Lösung

$$[R] = \mathcal{L}^{-1} [P] \quad (5.5.13)$$

der Gleichung (5.3.11) ein, so folgt

$$[R] = \sum_{i=1}^{\infty} \{w, [P]\} R^{(i)}, \quad [w] = \sum_{i=1}^{\infty} \{w, [P]\} w^{(i)} \quad (5.5.14)$$

Auf der rechten Seite stehen jetzt nur noch bekannte Funktionen; man kann also die Koeffizienten dieser Reihe einzeln berechnen. Dies ist das *Bergman*-Lösungsverfahren, hier allein durch die iterative Erzeugung des *Bergman*-orthonormierten Funktionensystems und die Darstellungsform etwas modifiziert. Die Entwicklung (5.5.14) konvergiert mit Sicherheit, wenn man

$$R = \frac{[P]}{\sqrt{\{[w], \mathcal{L}[P]\}}} \quad [u] = U^\circ [P] \quad (5.5.15)$$

wählt.

Offenbar ist die Kombination von Iteration und *Bergmanscher* Reihenentwicklung dann besonders vorteilhaft, wenn man die zweite Randwertaufgabe für verschiedene Belastungsfälle am selben Realkörper zu lösen hat. Denn man kann das bei der Lösung des ersten Problems erzeugte *Bergman*-orthonormierte Funktionensystem für die Lösung aller folgenden Belastungsfälle nach der Reihenentwicklung (5.5.14) wiederverwenden: erhält man auf diesem Wege noch keine zufriedenstellende Annäherung, so kann man das orthonormierte

Funktionensystem jederzeit durch Anschluß einiger zusätzlicher Iterationsschritte ergänzen. Diese Eigenschaft der Wiederverwendbarkeit der bei der Iteration erzeugten Funktionensysteme teilt das *Bergmansche* Verfahren nach § 5.4–5 mit der Methode von *Hestenes* und *Stiefel* (§ 5.4, Schluß). Dies ist keineswegs zufällig, sondern beruht auf einem engen inneren Zusammenhang, den wir nun genauer untersuchen wollen. Es wird sich zeigen, daß die Verbindung von *Bergmanscher* Orthonormierung und Iteration auf die „ $\mathcal{L}$ -minimale Iteration“ der Matrizenrechnung führt, die sich auf eine dreigliedrige Rekursionsformel reduzieren läßt. Vom *Hestenes-Stiefel*-Verfahren unterscheidet sich die  $\mathcal{L}$ -minimale Iteration nur durch unwesentliche Skalarfaktoren in den erzeugten Funktionenfolgen ([151], Kap. VI; [158]).

#### 5.5.D. *Bergmansche* Reihenentwicklung und *Hestenes-Stiefel*-Verfahren.

Die *Bergmansche* Reihenentwicklung läßt sich — allerdings nicht im chronologischen Sinne \*) — auffassen als eine Weiterentwicklung der *Trefftz*schen Variationsmethode zur Lösung von Randwertproblemen elliptischer partieller Differentialgleichungssysteme. Der zu extremierende Ausdruck, welcher im Falle der Elastostatik die potentielle Energie (4.2.42; 5.3.6) des Realkörpers bedeutet, ist in beiden Fällen derselbe. In beiden Fällen wird auch das Variationsproblem näherungsweise direkt gelöst mit Hilfe von Vergleichsfunktionen, welche zwar im Innern von  $K^+$  die Differentialgleichungen, nicht aber die Randbedingungen an der Oberfläche erfüllen. Während aber *Trefftz* außer der Vollständigkeit keine weiteren Anforderungen an sein Funktionensystem stellt, unterwirft *Bergman* seine Vergleichsfunktionen vorher einem *Gram-Schmidt*-schen Orthonormierungsprozeß nach der Orthogonalitätsbedingung (5.5.10) und vermag danach die Auflösung umfangreicher Gleichungssysteme beim *Trefftz*schen Verfahren zu ersetzen durch die einfache Reihenentwicklung (5.5.14) bzw. durch Reihenentwicklungen, bei denen die Kräftebelegungen und Verschiebungen auf  $(S)$  in  $K^\circ$  ersetzt sind durch die zugehörigen Spannungs- und Dehnungsfelder [33–39].

Das zu extremierende Funktional ist also bei den Verfahren von *Trefftz* und von *Bergman* dasselbe wie bei dem Verfahren von *Hestenes* und *Stiefel* und damit bei der Momentenmethode. Koppelt man nun die Verfahren von *Trefftz* und von *Bergman* mit einem Iterationsprozeß, indem man die Iterierten einer Ausgangsfunktion, in unserem Falle also einer Kräftebelegung  $F^1$ , als Vergleichsfunktionen des *Trefftz*schen Verfahrens bzw. als Rohfunktionen für das *Bergmansche* Orthogonalsystem wählt, so erscheinen beide Verfahren gleich dem Verfahren von *Hestenes* und *Stiefel* als Sonderformen der Momentenmethode. Denn in beiden Fällen wird die tatsächlich zu lösende Gleichung (5.3.11) näherungsweise ersetzt durch ihre Projektion in einen endlich-dimensionalen Unterraum des Zustandsraums, welcher von den ersten  $n$  Iterierten einer Ausgangsfunktion aufgespannt wird. Von der Ausgangsfunktion  $F^1$  muß dabei lediglich verlangt werden, daß der Funktionenraum ihrer sämtlichen

\*) Tatsächlich ist das *Bergmansche* Verfahren in der Potentialtheorie wesentlich älter. Erst die Erweiterung des *Bergmanschen* Verfahrens auf die Elastizitätstheorie [36] erfolgte etwa gleichzeitig mit der Veröffentlichung von *Trefftz* [148].

Iterierten die rechte Seite  $[P]$  von (5.3.11) enthält ([62], Satz X, S. 61), was am sichersten erreicht wird, wenn man

$$F^1 = [P] \quad (5.5.16)$$

setzt. Grundsätzlich ist dies aber nicht erforderlich, und darauf beruht die Möglichkeit, für  $F^1$  die rechte Seite eines bereits vorher gerechneten Belastungsfalles zu verwenden, von der man bereits eine Anzahl von Iterierten zur Verfügung hat. Auf diese Weise gewinnt man zumindest eine bessere Ausgangsnäherung mit einem — besonders bei den Verfahren von *Bergman* und *Hestenes-Stiefel* — relativ geringen Aufwand, selbst wenn  $F^1$  samt seinen Iterierten die obgenannte Bedingung nicht erfüllt und das Iterationsverfahren mit dem verbleibenden Rest als neuer rechter Seite und mit einem neuen  $F^1$  weitergeführt werden muß.

Die Verwandtschaft zwischen der *Bergmanschen* Reihenentwicklung mit Iteration und dem *Hestenes-Stiefel*-Verfahren ist sogar noch enger. Man bemerkt bereits in § 5.4, daß beim *Hestenes-Stiefel*-Verfahren die gleichzeitige Erzeugung der im Zustandsraum  $S$  orthogonalen Folge der Kräftebelegungen  $R^{n*}$  nach (5.4.4c) sowie der im *Bergmanschen* Sinne (5.5.9) orthogonalen Folge der Kräftebelegungen  $F^n$  nach (5.4.4d) völlig unabhängig verläuft von dem Aufbau der Näherungsfunktionen  $[R]^n$  nach (5.4.4e) aus den Funktionen  $F^n$ . Daß die Koeffizienten  $A_n$  in (5.4.4e) bereits bei der Erzeugung des Funktionensystems anfallen, liegt an der speziellen Wahl der Ausgangsfunktion  $F^1$  nach (5.4.4a).

Noch deutlicher kommt diese Unabhängigkeit der rekursiven Konstruktion des *Bergman*-orthogonalen Systems der  $F^n$  vom Aufbau der Näherungsfunktion  $[R]^n$  zum Ausdruck in der verallgemeinerten Form, die *Worobjow* ([62], § III, 4, Gl. (29), S. 61) dem Algorithmus von *Hestenes* und *Stiefel* gegeben hat. Hier verläuft der Aufbau des Orthogonalsystems mit beliebigem  $F^1$  nach dem Schema

$$\tilde{R}^{1*} = F^1 \quad (5.5.17)$$

$$\tilde{R}^{n*} = \tilde{R}^{n-1*} - A_{n-1} \mathcal{L} F^{n-1}$$

$$\tilde{w}^{n*} = U^\circ \tilde{R}^{n*} \quad (5.5.18)$$

mit

$$A_{n-1} = \frac{\{\tilde{w}^{n-1*}, \tilde{R}^{n-1*}\}}{\{f^{n-1}, \mathcal{L} F^{n-1}\}} \quad (5.5.19)$$

$$F^n = \tilde{R}^{n*} + \Omega_n F^{n-1}$$

$$f^n = \tilde{w}^{n*} + \Omega_n f^{n-1} \quad (5.5.20)$$

mit

$$\Omega_n = \frac{\{\tilde{w}^{n*}, \tilde{R}^{n*}\}}{\{\tilde{w}^{n-1*}, \tilde{R}^{n-1*}\}} \quad (5.5.21)$$

Der rekursive Aufbau der Näherungslösung  $[R]^n$  aus den *Bergman*-orthogonalen Kräftebelegungen  $F^n$  erfolgt dagegen durch

$$[R]^0 = 0 \quad (5.5.22)$$

$$[R]^n = [R]^{n-1} + C_n A_n F^n \quad (5.5.23)$$

mit

$$C_1 = \frac{\{f^1, [P]\}}{\{f^1, F^1\}} \quad (5.5.24)$$

$$C_n = C_{n-1} + \frac{\{\tilde{w}^{n*}, [P]\}}{\{\tilde{w}^{n*}, \tilde{R}^{n*}\}} \quad (5.5.25)$$

Hier ist an die im übrigen beliebige Kräftebelegung  $F^1$  in (5.5.17) nur die eine Anforderung zu stellen, daß in dem von ihren Iterierten aufgespannten Unterraum des Zustandsraums  $S$  die gegebene Belastung  $[P]$  enthalten ist. Im übrigen kann man für  $[R]^0$  wie in (5.4.4) an Stelle von (5.5.22) auch eine geschätzte, nicht verschwindende Näherung einsetzen; dann tritt in (5.5.24–25) an die Stelle der ursprünglich gegebenen Belastung  $[P]$  der negative Rest  $R^{1*}$  nach (5.4.4a).

Da die Kräftebelegungen  $F^n$  Bergman-orthogonal sind, müssen die Zahlenfaktoren  $C_n A_n$  in (5.3.23) durch Multiplikation mit einem Normierungsfaktor aus den Koeffizienten der Bergmanschen Reihenentwicklung (5.5.14) hervorgehen, wenn  $[R]^n$  wirklich das Minimum der potentiellen Energie (5.3.6) im Unterraum der ersten  $n$  Iterierten von  $F^1$  im Zustandsraum  $S$  sein soll. Das heißt, es muß nach (5.5.10, 14)

$$C_n A_n = \frac{\{f^n, [P]\}}{\{f^n, \mathcal{L} F^n\}} \quad (5.5.26)$$

([69], (14.44), S. 176; [151], Kap. VI) und somit wegen (5.5.19)

$$C_n = \frac{\{f^n, [P]\}}{\{\tilde{w}^{n*}, \tilde{R}^{n*}\}} \quad (5.5.27)$$

sein. Für  $n = 1$  trifft dies nach (5.5.17, 24) tatsächlich zu. Für alle weiteren  $n$  verifiziert man (5.5.27) durch vollständige Induktion. Es sei also (5.5.27) bis  $n = \nu - 1$  bewiesen. Dann berechnet man aus (5.5.25) mit (5.5.21) und (5.5.20)

$$\begin{aligned} C_\nu &= \frac{\{f^{\nu-1}, [P]\}}{\{\tilde{w}^{\nu-1*}, \tilde{R}^{\nu-1*}\}} + \frac{\{\tilde{w}^{\nu*}, [P]\}}{\{\tilde{w}^{\nu*}, \tilde{R}^{\nu*}\}} \\ &= \frac{\{\Omega_\nu f^{\nu-1} + \tilde{w}^{\nu*}, [P]\}}{\{\tilde{w}^{\nu*}, \tilde{R}^{\nu*}\}} = \frac{\{f^\nu, [P]\}}{\{\tilde{w}^{\nu*}, \tilde{R}^{\nu*}\}} \end{aligned} \quad (5.5.28)$$

wie von vornherein zu erwarten war. Der Algorithmus (5.5.17–21) von Hestenes und Stiefel erscheint damit als ein spezielles Verfahren zur Erzeugung einer Folge Bergman-orthogonaler Kräftebelegungen  $F^n$ , welches gegenüber dem Bergmanschen Gram-Schmidt-Prozeß in Verbindung mit der Iteration einerseits den Vorteil geringeren Rechenaufwandes, andererseits den Nachteil größerer Anfälligkeit gegenüber Rundungsfehlern hat.

Eine genauere Untersuchung zeigt überdies, daß die Verbindung von Iteration und *Bergman*-Orthonormierung, also die „Methode der  $\mathcal{L}$ -minimalen Iteration“ nach ([151], Kap. VI, §§ 65–67) bis auf die Normierung dem Algorithmus (5.5.17–21) völlig gleichwertig ist. Denn bei der Anwendung des *Bergmanschen* *Gram-Schmidt*-Prozesses auf eine Folge von Iterierten nach den Gleichungen

$$\begin{aligned}\tilde{F}^n &= \mathcal{L} R - \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ w \mathcal{L}, \mathcal{L} R \right\}^{(i)} R \\ &= \mathcal{L} R - \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ w \mathcal{L}, \mathcal{L} R \right\}^{(i)} R\end{aligned}\quad (5.5.29)$$

$$R = \frac{\tilde{F}^n}{\sqrt{\{\tilde{f}^n, \mathcal{L} \tilde{F}^n\}}}, \quad w = U^c R \quad (5.5.30)$$

verschwinden zunächst in der Summe auf der rechten Seite von (5.5.29) — einer unvollständigen Entwicklung von  $\mathcal{L} R$  nach (5.5.12) — alle Koeffizienten bis auf die beiden letzten. Dies folgt sofort aus der Überlegung, daß die Funktionen  $\mathcal{L} R$  nichts anderes sind als Linearkombinationen der Kräftebelegungen  $R, R, \dots R$ , also nach der *Bergmanschen* Orthogonalitätsbedingung (5.5.10)

$$\left\{ w \mathcal{L}, \mathcal{L} R \right\}^{(i)} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n-3 \quad (5.5.31)$$

gilt. Das  $(n-2)$ -te Glied der Summe erlaubt nach ([151], Kap. VI) noch eine weitere Vereinfachung. Ersetzt man in (5.5.29)  $n$  durch  $n-1$ , löst nach  $\mathcal{L} R$  auf und setzt dies in die ursprüngliche Gleichung (5.5.29) ein, so folgt wegen (5.5.10)

$$\left\{ w \mathcal{L}, \mathcal{L} R \right\}^{(n-2)} = \left\{ w \mathcal{L}, \tilde{F}^{n-1} \right\} \quad (5.5.32)$$

Zusammenfassung ergibt den folgenden Algorithmus, den wir gleich in der für die praktische Rechnung geeigneten Form anschreiben

$$w \mathcal{L} = U^c \mathcal{L} R \quad (5.5.33)$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}^n &= \mathcal{L} R - \left\{ w \mathcal{L}, \mathcal{L} R \right\}^{(n-1)} R - \left\{ w \mathcal{L}, \tilde{F}^{n-1} \right\}^{(n-2)} R \\ \tilde{f}^n &= w \mathcal{L} - \left\{ w \mathcal{L}, \mathcal{L} R \right\}^{(n-1)} w - \left\{ w \mathcal{L}, \tilde{F}^{n-1} \right\}^{(n-2)} w\end{aligned}\quad (5.5.34)$$

$$R = \frac{\tilde{F}^n}{\sqrt{\{\tilde{f}^n, \mathcal{L} \tilde{F}^n\}}}, \quad w = \frac{\tilde{f}^n}{\sqrt{\{\tilde{f}^n, \mathcal{L} \tilde{F}^n\}}} \quad (5.5.35)$$

also ein Rechenschema, das dem Algorithmus (5.5.18–21) völlig gleichwertig ist hinsichtlich des relativ geringen Rechenaufwands, freilich auch in seiner Anfälligkeit gegen Rundungsfehler. An Hand der in ([151], Kap. VI, § 69; [158]) angegebenen Beziehungen läßt sich nachweisen, daß sich bei gleicher

Ausgangsfunktion die Kräftebelegungen  $\tilde{F}^n$  und damit  $R$  tatsächlich nur um skalare Faktoren von den Kräftebelegungen  $F^n$  in (5.5.20) unterscheiden. Wegen weiterer Varianten der Momentenmethode und verwandter Verfahren verweisen wir ebenfalls auf die sehr umfassende Zusammenstellung in [151], Kap. VI sowie in [158]. Dort werden auch für unsymmetrische Matrizen und Operatoren brauchbare Verfahren behandelt.

5.5.E. Überlegungen zur numerischen Rechnung. Vergleich mit der iterationsfreien *Bergmanschen* Orthogonalentwicklung.

Wir haben — in Anlehnung an die Ausführungen von Kap. VI in dem Buch von *Faddejew* und *Faddejewa* [151] — zeigen können, daß die Verbindung von *Bergmanscher* Orthogonalentwicklung und Iteration oder die  $\mathcal{L}$ -minimale Iteration ([151], Kap. VI, § 65–67) einerseits und das Verfahren von *Hestenes* und *Stiefel* ([151], Kap. VI, § 68–69) andererseits trotz verschiedener Ausgangspunkte auf nur unwesentlich verschiedene Rechenverfahren führen, und daß sich beide als spezielle Formen der Momentenmethode [62] auffassen lassen. Man sieht überdies ohne Schwierigkeit, daß sich einerseits der Algorithmus (5.5.18–21) durch Elimination der  $R^{n*}$  auf eine dreigliedrige Rekursionsformel ähnlich (5.5.33–35) zurückführen läßt; andererseits läßt sich auch der Algorithmus (5.5.33–35) in ein Schema der Form (5.5.18–21) überführen, derart, daß sich die auftretenden Funktionenfolgen nur um Skalarfaktoren unterscheiden ([151], Kap. VI, §§ 67, 69; [158]). Man mag als Vorteil des Algorithmus (5.5.33–35) anführen, daß die Funktionenfolge normiert ist, was bei Rechnung mit festem Komma die Genauigkeitsverluste durch Rundungsfehler vermindert, und als Vorteil des *Hestenes-Stiefel*-Verfahrens andererseits, daß in seiner speziellen Form (5.4.4) unmittelbar die negativen Reste (5.4.4c) erscheinen und daß bei der Berechnung der Entwicklungskoeffizienten nach (5.4.4b') normalerweise keine kleinen Differenzen großer Zahlen auftreten. Im ganzen wird sich aber wohl weder im Rechenaufwand noch in der Anfälligkeit gegen Rundungsfehler ein wesentlicher Unterschied ergeben.

Es kann daher besonders bei umfangreichen finiten Ersatzmatrizen für den Operator  $\mathcal{L}$  zweckmäßig sein, an Stelle von (5.5.34) die volle Reihenentwicklung (5.5.29) zu verwenden. Denn die Orthogonalitätsbeziehung (5.5.31) ist bei numerischer Rechnung nur bis auf Rundungsfehler erfüllt; die Verwendung von (5.5.29) gibt also die Möglichkeit, solche Rundungsfehler sofort zu erkennen und — innerhalb der numerischen Genauigkeit einer Anwendung von  $\mathcal{L}$ , also einer Multiplikation mit der finiten Ersatzmatrix — zu korrigieren. Eine zu (5.5.32) analoge Umformung gestattet es auch, an Stelle von (5.5.29) die Formel

$$\tilde{F}^n = \mathcal{L} R - \left\{ w \mathcal{L}, \mathcal{L} R \right\}^{\{n-1\}} R - \sum_{i=1}^{n-2} \left\{ w \mathcal{L}, \tilde{F}^{i+1} \right\}^{\{i\}} R \quad (5.5.36)$$

zu setzen. In ähnlicher Weise lassen sich die Rundungsfehler des *Hestenes-Stiefel*-Verfahrens (5.5.18–21) vermindern nach der Formel

$$\begin{aligned} F^n &= F^{n*} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\{f^{n*}, \mathcal{L} F^i\}}{\{f^i, \mathcal{L} F^i\}} F^i \\ &= F^{n*} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\{f^{n*}, \hat{R}^{i+1*} - \hat{R}^{i*}\}}{\{\hat{w}^{i*}, \hat{R}^{i*}\}} F^i \end{aligned} \quad (5.5.37)$$

Hier sind mit  $F^{n*}$  bzw.  $f^{n*}$  die mit Rundungsfehlern behafteten Ergebnisse von (5.5.20) bezeichnet.

Natürlich wird der Rechenaufwand durch die Verwendung von (5.5.36) bzw. (5.5.37) an Stelle von (5.5.34) bzw. (5.5.20) erhöht; bei den ersten Iterationsschritten macht dies noch relativ wenig aus, steigert sich aber im Laufe des Verfahrens fast bis zur Verdopplung der erforderlichen Anzahl von Multiplikationen (Bildung der Skalarprodukte und Multiplikation einer Funktion mit diesem Koeffizienten), wenn man bei einem Ersatzgleichungssystem mit  $N$  Unbekannten bis zur theoretischen Grenze von  $N$  Iterationsschritten weitergegangen ist. Im einzelnen erfordert die Momentenmethode in jeder Form genau  $N$  Iterationsschritte, um das finite Ersatzgleichungssystem theoretisch genau zu lösen. Der Rechenaufwand für einen Schritt des *Hestenes-Stiefel*-Verfahrens entspricht im wesentlichen einer Operation mit  $\mathcal{L}$ , d. h. also in der finiten Näherung einer Matrizenmultiplikation mit  $N^2$  Multiplikationen. Dazu kommt die Bildung der Verschiebung nach (5.3.3), welche die gleiche Zahl von Multiplikationen erfordern würde, wenn sich nicht für die Bildung der Skalarprodukte der Rechenaufwand durch Einführung der in der folgenden Ziffer erklärten „Teilverschiebungen“ etwa auf die Hälfte reduzieren ließe. Jeder Iterationsschritt erfordert demnach etwa  $3 N^2/2$  Multiplikationen und die zur theoretisch genauen Lösung erforderlichen  $N$  Iterationsschritte also  $3 N^3/2$  Multiplikationen; im Vergleich mit der direkten Elimination nach dem *Gauß*-schen Algorithmus mit  $N^3/3$  Multiplikationen ([68], S. 70; [69], S. 98) bedeutet dies etwa den 4,5fachen Rechenaufwand zur Gewinnung der „theoretisch“ (d. h. ohne Rundungsfehler) exakten Lösung. (Bei symmetrischen Matrizen würde die der Berechnung der Teilverschiebungen entsprechende Operation wegfallen; man hätte also nur den 3fachen Aufwand.) Freilich hat man in beiden Fällen mit Rundungsfehlern zu rechnen, die nach den in ([31], III.3.6, III. Fig. 4) angegebenen Rechenbeispielen in derselben Größenordnung liegen dürften. Verkleinert man die Rundungsfehler nach (5.5.37), so hat man beim  $n$ -ten Iterationsschritt  $n - 1$  Skalarprodukte zusätzlich zu bilden und außerdem  $n - 1$  Näherungslösungen mit einer Konstanten zu multiplizieren. Dies ergibt jeweils  $2 n (n - 1)$  Multiplikationen, also bei  $N$  Schritten  $N^2 (N - 1) \approx N^3$  zusätzliche Multiplikationen; allerdings ist dann ein genaueres Ergebnis als beim *Gauß*-schen Algorithmus zu erwarten.

Freilich ist bei diesen Überlegungen zu bedenken, daß in der Praxis fast nie eine exakte, sondern nur eine genügend genaue Lösung verlangt wird. Wir haben aber schon in § 5.1 gesehen, daß zur Erzielung einer genügend genauen Lösung in gewissen Fällen bereits die gewöhnliche Iteration der Elimination weitaus überlegen sein kann; das Verfahren von *Hestenes* und *Stiefel* hätte in



dem angeführten Beispiel der isotropen Kreisscheibe nach § 4.3.B mit  $F^1 = [P]$  sogar schon nach 3 Schritten zur theoretisch exakten Lösung geführt. Wesentlich für die rasche Konvergenz der Momentenmethoden ist das Verhältnis des größten zum kleinsten Eigenwert von  $\mathcal{L}$ , die „ $P$ -condition“ des Operators ([31], Gl. (III.3), S. 50). Dies gilt nach (5.3.18, 23) bereits für die einfacheren Verfahren von § 5.3, von denen die Methode des schnellsten Abstiegs als eine Vorstufe der Momentenmethode aufzufassen ist (vgl. auch [151], Kap. VII, speziell den allgemeineren Satz 72.1 und die Abschätzungen von § 73). Nun kann man nach § 4 erwarten, daß der  $P$ -Wert des Operators  $\mathcal{L}$  im Zustandsraum  $S$  höchstens die Größenordnung 10 erreichen wird für Scheibenprobleme, die man sinnvollerweise mit elastizitätstheoretischen Methoden lösen wird, im Gegensatz zu den  $P$ -Werten von etwa 1600 mit 70 Gitterpunkten oder gar 22 000 mit 270 Gitterpunkten, die sich bei der in [31] vorgeschlagenen Behandlung eines Plattenproblems mit gemischten Randbedingungen ergeben. Man darf also mit Sicherheit annehmen, daß die nach § 4 bestimmten finiten Ersatzgleichungssysteme in praktisch sinnvollen Fällen lange vor der theoretischen Zahl von  $N$  Iterationsschritten nach einer Momentenmethode auf eine genügend genaue Lösung führen, und daß damit in diesen Fällen die beschriebenen Iterationsverfahren der direkten Elimination praktisch weit überlegen sind. Hinzu kommt, daß ein Iterationsverfahren einfacher zu programmieren ist als eine Eliminationsmethode, wenn bei Maschinen kleiner Speicherkapazität die finite Ersatzmatrix für  $\mathcal{L}$  auf Band oder Lochkarten gespeichert werden muß. Vor allem fallen dann bei der Iteration die bei der Elimination erforderlichen Ausgabezeiten für die abgeänderte Matrix nach jedem Eliminationsschritt weg.

Nach ([31], S. 50–51) wächst bei der numerischen Lösung eines Randwertproblems nach einem Gitternetzverfahren nicht nur die Zahl  $N$  der Unbekannten und der Gleichungen, sondern die Gleichungssysteme werden auch, entsprechend dem anwachsenden  $P$ -Wert, immer schlechter bestimmt. In diesem Punkt ist demnach unser auf dem Rand des Gebietes arbeitendes Iterationsverfahren eindeutig überlegen. Denn in unserem Fall strebt das Spektrum der finiten Ersatzmatrix mit wachsendem  $N$  gegen das Spektrum des Operators  $\mathcal{L}$  nach § 4, welches sich normalerweise durch einen relativ kleinen  $P$ -Wert und damit durch gute Konvergenz der Iterationsverfahren auszeichnet. Die Konvergenzeigenschaften werden schließlich auch noch durch die mit  $N$  zunehmende Konzentration der meisten neu hinzukommenden Eigenwerte um die beiden in § 4 bestimmten Häufungspunkte günstig beeinflußt (vgl. § 5.5.A, Schluß, S. 303).

Eine nützliche Eigenschaft der Algorithmen (5.5.17–21) bzw. (5.5.33–35) ist schließlich auch die Möglichkeit, die bei der Lösung des Randwertproblems für einen gewissen Belastungsfall angefallenen *Bergman*-orthogonalen Funktionen  $F^n$  bzw.  $\tilde{F}^n$  für andere Belastungsfälle erneut heranzuziehen. Hier erhebt sich allerdings die Frage, ob das bereits vorliegende Funktionensystem hinreichend vollständig ist, um die Lösung des neuen Belastungsfalls ausreichend anzunähern, gegebenenfalls nach Vervollständigung durch weitere Funktionen derselben Folge. Wir haben im Anschluß an (5.5.25) als hinreichende Bedingung hierfür angegeben, daß der von den Iterierten der Kräfte-

belegung  $F^1$  aufgespannte Unterraum die (neue) gegebene Kräftebelegung  $[P]$  enthalten muß. Eine notwendige Bedingung hierfür ist, daß der Integrand der zu (2.4.32) entsprechenden Spektraldarstellung von  $F^1$  höchstens an den Stellen verschwindet, an denen er auch für die entsprechende Spektraldarstellung von  $[P]$  verschwindet. Besitzt der Operator  $\mathcal{L}$  ein reines Punktspektrum, wie das bei Randwertproblemen nach § 4 der Fall ist, so bedeutet dies, daß für jede an  $[P]$  beteiligte Eigenfunktion des Operators auch eine Eigenfunktion zum selben Eigenwert an  $F^1$  beteiligt ist. Es ist klar, daß diese Voraussetzung auch hinreicht, wenn sämtliche Eigenwerte von  $\mathcal{L}$  einfach sind, denn dann entspricht jedem Eigenwert genau eine Eigenfunktion, und bei der Iteration entsteht ein hinreichend vollständiges System ihrer Linearkombinationen.

Anders ist es bei mehrfachen Eigenwerten. Nach Satz 2 von § 2.5 ist jede Linearkombination von Eigenfunktionen zum selben Eigenwert selbst wieder eine Eigenfunktion. Demnach wird bei der Iteration für einen mehrfachen Eigenwert von  $\mathcal{L}$  stets dieselbe Linearkombination von Eigenfunktionen reproduziert, die auch schon in der Entwicklung von  $F^1$  nach den Eigenfunktionen des Operators  $\mathcal{L}$  enthalten war; ist an  $[P]$  eine andere Linearkombination der Eigenfunktionen zum selben mehrfachen Eigenwert beteiligt, so kann das Verfahren mit der Ausgangsfunktion  $F^1$  nicht konvergieren, und man muß zur weiteren Verbesserung mit einem neuen  $F^1$ , etwa dem verbleibenden Rest, neu beginnen. Während also bei lauter einfachen Eigenwerten praktisch kaum irgendwelche Schwierigkeiten auftreten werden, wenn  $F^1$  und  $[P]$  verschieden sind, wird es bei mehrfachen Eigenwerten mit  $F^1 \neq [P]$  normalerweise nicht möglich sein, die Approximation nach (5.5.17–36) beliebig weit zu treiben. Denn die Aufgabe, zu einer gegebenen Funktion  $[P]$  eine andere Funktion  $F^1$  zu finden, an der bei mehrfachen Eigenwerten dieselben Linearkombinationen von Eigenfunktionen beteiligt sind, kann ohne Kenntnis des Spektrums und der Eigenfunktionen nicht gelöst werden. Von selbst wird aber diese Bedingung kaum jemals erfüllt sein. Es ist demnach erst recht unmöglich, bei mehrfachen Eigenwerten im Spektrum von  $\mathcal{L}$  ein vollständiges Funktionensystem durch Iteration einer einzigen Ausgangsfunktion zu erzeugen. Mit dem Auftreten mehrfacher Eigenwerte muß man aber bei dem Operator  $\mathcal{L}$  stets rechnen; im Falle der isotropen Kreisscheibe haben wir in § 4 sogar zwei Eigenwerte unendlicher Vielfachheit festgestellt. Auch bei symmetrischen Realkörpern sind mehrfache Eigenwerte zu erwarten.

Für den Fall, daß das Spektrum von  $\mathcal{L}$  ein Kontinuum enthält, sind entsprechende Aussagen schwieriger zu formulieren. Daß jedoch die obengenannte Bedingung für die Spektraldarstellungen (2.4.32) von  $F^1$  und  $[P]$  ebenfalls nicht hinreichend für eine sichere Konvergenzaussage sein wird, läßt sich leicht an Hand von abstrakten Beispielen zeigen. Indessen kann dieser Fall bei den in § 4 diskutierten Randwertproblemen nicht eintreten.

In der ursprünglichen Form des *Bergmanschen* Verfahrens wird die Vollständigkeit des *Bergman*-orthogonalen Funktionensystems gesichert, indem man zunächst, unabhängig von der Form des Realkörpers, ein vollständiges Lösungssystem der Differentialgleichungen aufstellt [33–39]; die zuerst für die Potentialgleichung und die Bipotentialgleichung zugeschnittenen Ansätze

sind inzwischen auf andere Typen von Gleichungen und Gleichungssystemen verallgemeinert worden [156]. Diese Ansatzfunktionen werden dann in Bezug auf die elastische Energie des gegebenen Realkörpers orthonormiert. Eine weitere iterationsfreie Variante geht von einem vollständigen System von Kräftebelegungen auf  $(S)$  in  $K^\circ$  aus, welches sich mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen leicht erzeugen läßt. Hier ist der Rechenaufwand bestimmt einmal durch die Anwendung von  $\mathcal{L}$  auf die Ausgangs-Kräftebelegungen und zum anderen durch den anschließenden *Gram-Schmidt*-Prozeß. Er entspricht also mit  $5 N^3/2$  Multiplikationen dem *Hestenes-Stiefel*-Verfahren mit Rundungsfehlerkontrolle nach (5.5.37). Außerdem müssen vor der Orthogonalisation die verbotenen Anteile nach § 4.1 in den Ansatzfunktionen beseitigt werden.

Die iterationsfreien Formen der *Bergmanschen* Reihenentwicklung werden vor allem dann in Frage kommen, wenn entweder sehr viele Belastungsfälle am selben Realkörper zu untersuchen sind oder wenn bei sehr extremen Formen des Realkörpers eine rasche Konvergenz der Algorithmen (5.5.17–35) nicht zu erwarten ist. Normalerweise darf aber bei den Randwertproblemen von § 4 ein kleiner  $P$ -Wert der finiten Ersatzmatrix vorausgesetzt werden. Man kann also erwarten, daß das *Hestenes-Stiefel*-Verfahren oder die gleichwertige Entwicklung nach einem iterativ erzeugten *Bergman*-orthonormierten Funktionensystem rasch konvergieren wird, wenn man als Ausgangsfunktion  $F^1$  die gegebene Belastung  $[P]$  wählt oder den Rest einer Ausgangsnäherung, die man entweder durch Schätzung oder durch Entwicklung nach einem unvollständigen *Bergman*-orthogonalen Funktionensystem gewonnen hat.

### 5.6 Zur praktischen Berechnung der Skalarprodukte

Der zusätzliche Rechenaufwand für jeden einzelnen Iterationsschritt bei den Verfahren von § 5.3–5 ist hauptsächlich oder sogar fast ausschließlich durch die Berechnung der Verschiebungen für die Skalarprodukte  $\{\hat{w}, \hat{R}\}$  bedingt. Man kann diesen Aufwand unter Ausnützung der Periodizität sämtlicher Funktionen mit der Länge  $L$  der Kurve  $(S)$  einerseits und der Symmetrie des Operators  $U^\circ$  andererseits etwa auf die Hälfte reduzieren durch Einführung der „Halbverschiebungen“:

$$\tilde{w}_i(s) = \int_{s'=s}^{s+\frac{L}{2}} \mathfrak{U}_{ij}^\circ(\xi - \xi') R_j(s') ds' \quad (5.6.1)$$

falls es nur auf die Skalarprodukte, nicht aber auf die Verschiebungen selbst ankommt. Denn durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Umbenennung der Integrationsveränderlichen kann man nach (4.2.1) und (4.4.5–6) umformen

$$\begin{aligned} \{\hat{w}, \hat{R}\} &= \{\hat{R}, U^\circ \hat{R}\} \\ &= {}^{(S)} \int_{s=0}^L \int_{s'=0}^L \hat{R}_i(s) \mathfrak{U}_{ij}^\circ(\xi - \xi') \hat{R}_j(s') ds ds' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( (s) \int_{s=0}^L \int_{s'=s}^{s+\frac{L}{2}} + (s) \int_{s=0}^L \int_{s'=s+\frac{L}{2}}^{s+L} \right) \hat{R}_i(s) \mathfrak{U}_{ij}^\circ(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \hat{\hat{R}}_j(s') ds ds' \\
&= \left( (s) \int_{s=0}^L \int_{s'=s}^{s+\frac{L}{2}} + (s) \int_{s'=0}^L \int_{s=s'}^{s'+\frac{L}{2}} \right) \hat{R}_i(s) \mathfrak{U}_{ji}^\circ(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \hat{\hat{R}}_j(s') ds ds' \\
&= (s) \int_{s=0}^L \int_{s'=s}^{s+\frac{L}{2}} \left( \hat{R}_i(s) \mathfrak{U}_{ij}^\circ(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \hat{\hat{R}}_j(s') + \hat{\hat{R}}_i(s) \mathfrak{U}_{ij}^\circ(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \hat{R}_j(s') \right) ds ds' \\
&= \int_{s=0}^L \left( \hat{R}_i(s) \hat{\hat{w}}_i(s) + \hat{\hat{R}}_i(s) \hat{w}_i(s) \right) ds \quad (5.6.2)
\end{aligned}$$

Die Integration (5.6.1) erstreckt sich nur über die halbe Länge der Randkurve, erfordert also numerisch nur etwa halb so viel Zeit, als wenn man die wirkliche Verschiebung ausrechnen müßte. Die Umformung (5.6.2) läßt sich auch ausführen, wenn man die Integrationsveränderlichen  $s$  und  $s'$  durch eine monotone Funktion  $f = f(s)$  bzw.  $f' = f(s')$  der Bogenlänge  $s$  bzw.  $s'$  ersetzt; man substituiert dann wie üblich

$$ds = \frac{ds}{df} df \quad \text{bzw.} \quad ds' = \frac{ds'}{df'} df' \quad (5.6.3)$$

und führt die Umformung (5.6.2) für  $f$  und  $f'$  statt für  $s$  und  $s'$  aus. Auf diese Weise lassen sich die Halbverschiebungen einer — bei komplizierten Scheibenformen zuweilen zweckmäßigen — veränderlichen Länge der Integrationsintervalle bei der numerischen Rechnung anpassen.

Die finite Ersatzmatrix für den Operator  $U^\circ$  braucht also bei kleiner Speicherkapazität nur in Halbzeilen in die Rechenmaschine eingelesen zu werden. Diese Halbzeilen genügen auch, wie man leicht zeigen kann, zur Berechnung der Verschiebung selbst; allerdings spart man dann nicht mehr Rechenzeit, sondern nur noch Einlesezeit und Speicherplätze ein. Schließlich kann man bei der Schlußrechnung durch Differenzieren der Verschiebung auf dem Rand die nötigen Daten gewinnen, um unter Heranziehung der gegebenen Kräftebelegungen auch die Tangentialspannung am Rande von  $K^+$  auszurechnen. Die numerische Aufstellung eines besonderen Operators zur Berechnung der Tangentialspannung aus der Kräftebelegung  $[R]$  zusätzlich zum Operator  $U^\circ$  ist also nicht mehr erforderlich.

### Anhang 1: Zur Darstellung der Vektor- und Tensoroperationen

Wir bezeichnen in § 3 die Vektoren durch gotische Buchstaben, die Tensoren 2. Stufe durch unterstrichene kleine griechische Buchstaben und die Tensoren 4. Stufe mit den Symmetrieeigenschaften des Tensors der Elastizitätskonstanten durch unterstrichene kleine lateinische Buchstaben. An

einigen Stellen werden Vektoren auch durch Überstreichen mit einem Pfeil gekennzeichnet.

Zur Abkürzung der Vektor- und Tensoroperationen setzen wir mit *Gibbs* und *Lagally* [81, 82]

$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \equiv a_i b_i$  für das skalare Produkt der Vektoren  $\mathfrak{a} \equiv (a_i)$  und  $\mathfrak{b} \equiv (b_i)$ ,

$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \equiv (\epsilon_{ijk} a_j b_k)$  für das vektorielle Produkt,

$\mathfrak{a} \mathfrak{b} \equiv (a_i b_j)$  für das dyadische Produkt,

$\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon} \equiv \varepsilon_{ij} \sigma_{ji}$  für das doppelt-skalare Produkt zweier Tensoren zweiter Stufe,

$\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon} \equiv (\varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{ljk})$  für das doppelt-skalare Produkt mit einem Tensor vierter Stufe (allgemeine Regel: Man summiert zuerst über die nächstbenachbarten Indizes),

$I \equiv (\delta_{ij})$  für den Einheitstensor zweiter Stufe,

$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$  für den Nabla-Vektor.

Die Indizes beziehen sich auf *Cartesische* Koordinaten. Die Stellung des Nabla-Vektors wird durch die Regeln der Vektormultiplikation bestimmt; differenziert wird im selben Produkt vor- und rückwärts, wo nicht eine übergeordnete Klammer die differenzierende Wirkung unterbricht. Abweichungen von dieser Regel werden durch Pfeile kenntlich gemacht.

## Anhang 2: Ergänzungen zu § 2.5. Einschließungssätze für reelle Eigenwerte

**Satz 7** (*Krylow* und *Bogoljubow*, *Weinstein* [152, 154–155]): Es sei  $\mathfrak{B}$  ein linearer und symmetrischer Operator in einem reellen *Hilbert*-Raum,  $f$  ein beliebiges Element. Ferner sei

$$\mu_f[\mathfrak{B}] = \frac{\{f, \mathfrak{B} f\}}{\{f, f\}} \quad (\text{A2.1})$$

der *Rayleigh*-Quotient des Operators  $\mathfrak{B}$  und

$$\mu_f[\mathfrak{B}^2] = \frac{\{f, \mathfrak{B}^2 f\}}{\{f, f\}} = \left( \frac{\|\mathfrak{B} f\|}{\|f\|} \right)^2 \quad (\text{A2.2})$$

der *Rayleigh*-Quotient des Operators  $\mathfrak{B}^2$  mit dem Element  $f$ . Setzen wir dann

$$\delta_f[\mathfrak{B}] = \sqrt{\mu_f[\mathfrak{B}^2] - (\mu_f[\mathfrak{B}])^2} \quad (\text{A2.3})$$

so liegt in dem reellen Intervall

$$\mu_f[\mathfrak{B}] - \delta_f[\mathfrak{B}] \leq \mu \leq \mu_f[\mathfrak{B}] + \delta_f[\mathfrak{B}] \quad (\text{A2.4})$$

wenigstens ein Punkt des Spektrums von  $\mathfrak{B}$ .

**Beweis:** Wir bezeichnen als „ $\mu$ -Kreis“ und „ $\bar{\mu}$ -Kreise“ die Schnittkreise der

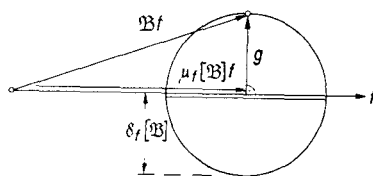
Hyperkugeln  $\mu$  und  $\bar{\mu}$  mit der Ebene der Elemente  $f$  und  $\mathfrak{B}f$ . Dann muß nach Corollar 1.1 der Endpunkt des Elements  $\mathfrak{B}f$  in dem vom  $\mu$ -Kreis und den  $\bar{\mu}$ -Kreisen begrenzten, abgeschlossenen Bereich liegen (vgl. z. B. Abb. 2.5.3). Wir fällen nun nach Abb. A2.1 das Lot

$$g = \mathfrak{B}f - \mu_f[\mathfrak{B}]f \quad (\text{A2.5})$$

vom Endpunkt von  $\mathfrak{B}f$  auf  $f$  (Abb. A2.1); wie man leicht nachrechnet, gilt mit (A2.3)

$$\|g\| = \delta_f[\mathfrak{B}]\|f\| \quad (\text{A2.6})$$

Abb. A2.1. Zum Einschließungssatz von Krylow und Bogoljubow



Wir unterscheiden nun drei Fälle:

1. Der Endpunkt von  $\mu_f f$  liegt außerhalb aller  $\bar{\mu}$ -Kreise. Dann gehört  $\mu_f$  nach Satz 1 selbst zum Spektrum und die Behauptung (A2.4) trifft zu. Liegt er dagegen auf einem  $\bar{\mu}$ -Kreis, so ist  $\mu_f$  entweder ein Eigenwert von  $\mathfrak{B}$  oder nach den Bemerkungen im Anschluß an (2.5.13) wenigstens äußerer Randpunkt eines Kontinuums. Auch in diesem Fall trifft die Behauptung zu.

2. Der Endpunkt von  $\mathfrak{B}f$  liegt auf einem  $\bar{\mu}$ -Kreis. Dann entsprechen die Schnittpunkte  $\mu' f$  und  $\mu'' f$  des  $\bar{\mu}$ -Kreises mit der Achse von  $f$  jeweils einem Eigenwert  $\mu'$  bzw.  $\mu''$ . Denn andernfalls könnte nach den Bemerkungen im Anschluß an (2.5.13) der Endpunkt von  $\mathfrak{B}f$  nicht auf diesem  $\bar{\mu}$ -Kreis liegen.

3. Der Endpunkt von  $\mathfrak{B}f$  liegt außerhalb aller  $\bar{\mu}$ -Kreise und der Endpunkt von  $\mu_f f$  innerhalb eines  $\bar{\mu}$ -Kreises. Dann gibt es einen Kreis durch den Endpunkt von  $\mathfrak{B}f$  um einen Punkt auf der Achse von  $f$ , welcher diesen  $\bar{\mu}$ -Kreis in seinem dem Endpunkt von  $\mathfrak{B}f$  am nächsten gelegenen Schnittpunkt  $\mu''' f$  mit der Achse von  $f$  von außen berührt. Dann ist  $\mu'''$  entweder ein Eigenwert oder der Randpunkt eines Kontinuums.

Zeichnet man also die Gesamtheit aller Kreise durch den Endpunkt von  $\mathfrak{B}f$  um alle Punkte der Achse von  $f$ , so gehört unter allen dem Endpunkt von  $\mathfrak{B}f$  am nächsten gelegenen Schnittpunkten dieser Kreise mit der Achse von  $f$  wenigstens einer zum Spektrum. Diese Schnittpunkte haben aber vom „Lotfußpunkt“  $\mu_f f$  höchstens den Abstand  $\delta_f[\mathfrak{B}]\|f\|$ , woraus die Behauptung (A2.4) folgt. Q. e. d.

**Satz 8** (Temple; vgl. auch Falk [152]): Von dem linearen und symmetrischen Operator  $\mathfrak{B}$  sei bekannt, daß er genau  $n$  verschiedene Eigenwerte  $\mu_i$  besitzt, und es seien außerdem  $n$  Elemente  $f_1, f_2, \dots, f_n$  derart gegeben, daß die zugehörigen, nach (A2.4) bestimmten Intervalle sich nirgends überdecken, und daß somit nach Satz 7 die Eigenwerte  $\mu_i$  einzeln in getrennte Intervalle ein-

geschlossen werden können. Dann läßt sich die Einschließung noch weiter verschärfen durch die in Abb. A2.2 gezeichnete Konstruktion. Für die oberen Intervallgrenzen beginnt diese Konstruktion am linken Rand, für die unteren Intervallgrenzen am rechten Rand.

Die Intervalle, in denen der Endpunkt eines Vektors  $\mu_i f$  liegen kann, sind in Abb. A2.2 doppelt ausgezogen. Wir verzichten auf eine ausführliche Darstellung des Beweises und begnügen uns mit dem Grundgedanken. Danach ergibt sich die Konstruktion von Abb. A2.2, wenn man die ungünstigsten, mit den bekannten Elementen  $\mathfrak{B} f_1, \mathfrak{B} f_2, \dots, \mathfrak{B} f_n$  verträglichen Lagen der  $\bar{\mu}$ -Kreise aufsucht. Diese ungünstigsten  $\bar{\mu}$ -Kreise sind in der Abb. strich-

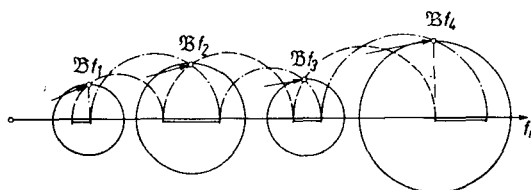


Abb. A2.2. Zum Einschließungssatz von Temple

punktiert für die oberen Schranken und gestrichelt für die unteren Schranken eingezeichnet. Die Identität mit den in ([152], Gl. (4.2)) formelmäßig angegebenen Schranken läßt sich mit Hilfe des elementargeometrischen Höhensatzes leicht nachweisen.

Naturgemäß ist dieser Satz vor allem in der Matrizenrechnung interessant. Bei allgemeinen symmetrischen Operatoren in einem Hilbert-Raum ist es nur in Ausnahmefällen möglich, die Zahl der verschiedenen Eigenwerte von vornherein zu begrenzen oder Teile der reellen Achse auf andere Weise vom Spektrum auszuschließen.

**Satz 9:** Es sei  $\mathfrak{B}$  ein linearer und symmetrischer Operator in einem reellen Hilbert-Raum, und es sei bekannt, daß in dem reellen, offenen Intervall  $\mu_1 < \mu < \mu_2$  höchstens ein Punkt  $\mu_0$  zu seinem Spektrum gehört. Ferner sei  $f$  ein beliebiges Element des betrachteten Hilbert-Raums. Dann gilt:

a) Wenn

$$\|\mathfrak{B} f - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} f\| < \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \|f\| \quad (\text{A2.7})$$

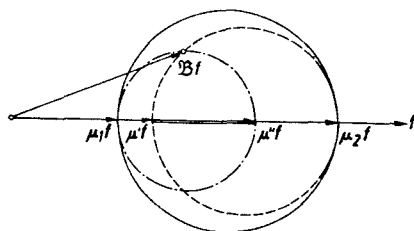


Abb. A2.3. Zu Satz 9a)

ist, so liegt in  $\mu_1 < \mu < \mu_2$  genau ein Eigenwert von  $\mathfrak{B}$ . Er läßt sich durch die in Abb. A2.3 angegebene Konstruktion noch weiter auf das Intervall  $\mu' \leq \mu \leq \mu''$  einschränken.

b) Es gibt zum Eigenwert  $\mu_0$  ein Eigenelement  $f$  derart, daß unter der Voraussetzung (A2.7) für  $\angle \alpha_0 = \angle (f, f^{<0>})$ , den Winkel zwischen  $f$  und  $f^{<0>}$ , gilt

$$|\sin (f, f^{<0>})| \leq \frac{\|\Im f - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} f\|}{\frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \|f\|} \quad (\text{A2.8})$$

(vgl. Abb. A2.4).

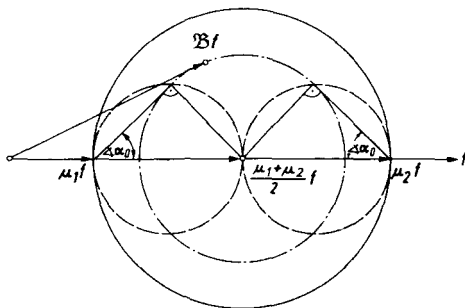


Abb. A2.4. Zu Satz 9b)

c) Es gelte über (A2.7) hinaus

$$\|\Im f - \frac{3}{4} \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} f\| \leq \frac{\mu_2 - \mu_1}{4} \|f\| \quad (\text{A2.9})$$

Dann gilt statt (A2.8) die schärfere Abschätzung

$$|\operatorname{tg} (f, f^{<0>})| \leq \frac{\delta_f [\Im]}{\mu_f [\Im] - \mu_1} \quad (\text{A2.10})$$

(vgl. Abb. A2.5). Entsprechend gilt im Falle

$$\|\Im f - \frac{\mu_1 + 3}{4} \frac{\mu_2}{2} f\| \leq \frac{\mu_2 - \mu_1}{4} \|f\| \quad (\text{A2.11})$$

die Abschätzung

$$|\operatorname{tg} (f, f^{<0>})| \leq \frac{\delta_f [\Im]}{\mu_2 - \mu_f [\Im]} \quad (\text{A2.12})$$

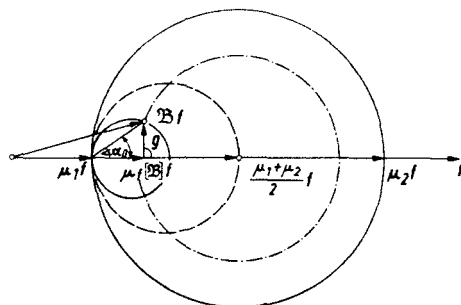


Abb. A2.5. Zu Satz 9c)

Hierbei sind  $\mu_f [\Im]$  und  $\delta_f [\Im]$  durch (A2.1, 3) erklärt.



Dieser Satz steht in engem Zusammenhang mit den Einschließungssätzen von *Falk* [152] und *Bollermann* [153] für Eigenvektoren bzw. Eigenfunktionen. Insbesondere geht c) aus Satz IV von *Falk* [152] hervor, wenn man ihn einerseits auf den Fall eines reellen Spektrums einschränkt und andererseits so formuliert, daß er für beliebige Operatoren mit reellem Spektrum gilt. Diese Erweiterung auf beliebige Operatoren ergibt sich sofort, wenn man überlegt, daß  $h_i$  in ([152], Gl. (5.2)) nichts weiter bedeutet als eine untere Schranke für die Entfernung von  $\mu_f[\mathfrak{B}]$  nach (A2.1) zu dem Punkt des Spektrums, der nach Ausschluß von  $\mu_0$  dem Wert  $\mu_f[\mathfrak{B}]$  am nächsten liegt.

Der Beweis von a) ergibt sich auf dieselbe Weise wie der Beweis von Satz 8. Man zeichnet einfach die beiden größten  $\bar{\mu}$ -Kreise, die mit dem bekannten  $\mathfrak{B}f$  sowie  $\mu_1$  und  $\mu_2$  verträglich sind (Abb. A2.3). In der Tat läßt sich Satz 9a) auffassen als eine Variante des von *Falk* [152] stammenden Satzes 8, wenn man ihn einerseits auf ein reelles Spektrum spezialisiert und andererseits in einer für beliebige symmetrische Operatoren gültigen Weise formuliert.

Die Sätze 9b) und 9c) beweisen wir zunächst für den Fall, daß der Operator  $\mathfrak{B}$  genau drei Eigenwerte besitzt, oder daß von dem Element  $f$  aus einem anderen Grunde bekannt ist, daß es im Unterraum dreier Eigenelemente des Operators  $\mathfrak{B}$  liegt. Wären dann die drei Eigenwerte  $m < \mu_0 < M$  bekannt, so könnte

man den Winkel  $\angle \alpha_0 = \angle (f, f)_{<0>}$  nach der in Anhang 3 durchgeführten Konstruktion bestimmen (Abb. A3.1). Tatsächlich ist von den drei Eigenwerten nur bekannt, daß sie von den bekannten Schranken  $\mu_1$  und  $\mu_2$  getrennt werden, daß also  $m \leq \mu_1 < \mu_0 < \mu_2 \leq M$  ist. Man kommt dann auf die Abschätzungen (A2.8, 10, 11), indem man an Hand der Konstruktion von Abb. A3.1 die im Sinne dieser Abschätzungen ungünstigsten Lagen der  $\bar{\mu}$ -Kreise aufsucht, welche mit den bekannten Schranken  $\mu_1$  und  $\mu_2$  sowie mit  $\mathfrak{B}f$  verträglich sind. Daraus ergeben sich sofort Abb. A2.4 und Abb. A2.5, aus denen man (A2.8) bzw. (A2.10) abliest. Eine entsprechende Konstruktion läßt sich auch für (A2.12) durchführen.

Zur Erweiterung des Beweises auf den Fall, daß auch noch weitere, außerhalb des Intervalls  $\mu_1 < \mu < \mu_2$  liegende Teile des Spektrums an  $f$  beteiligt sind, benützen wir den folgenden

Hilfssatz: Unter gleichzeitiger Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz 9 seien  $\mu_1 < \mu_0 < \mu_2$  Eigenwerte von  $\mathfrak{B}$  und  $f_{<1>}, f_{<0>}, f_{<2>}$  die zugehörigen normierten Eigenelemente. Es sei ferner

$$\frac{1}{\|f\|} \|\mathfrak{B}f - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} f\| = r < \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \quad (\text{A2.13})$$

fest vorgegeben. Dann ist unter allen Elementen  $f$ , die (A2.13) genügen, der Winkel  $\angle \alpha_0 = \angle (f, f)_{<0>}$  am größten für diejenigen Elemente  $f$ , an denen nur die Eigenwerte  $\mu_1, \mu_0, \mu_2$  mit den Eigenelementen  $f_{<1>}, f_{<0>}, f_{<2>}$  beteiligt sind.

Um die für den Beweis dieses Hilfssatzes erforderlichen Rechnungen zu vereinfachen, unterwerfen wir den Operator zunächst einer Spektralverschiebung

nach Satz 5, § 2.5 derart, daß der Mittelpunkt des Intervalls  $\mu_1 < \mu < \mu_2$  auf den Nullpunkt der reellen Achse zu liegen kommt und multiplizieren ihn anschließend mit  $\frac{2}{\mu_2 - \mu_1}$ . Auf diese Weise erhalten wir einen neuen Operator

$\widehat{\mathfrak{B}}$  mit den Eigenwerten  $-1$  und  $+1$ , zwischen denen genau ein weiterer Eigenwert  $\widehat{\mu}_0$  liegt. Die Bedingung (A2.13) geht bei dieser Transformation über in

$$\|\widehat{\mathfrak{B}} \widehat{f}\|^2 = \{\widehat{f}, \widehat{\mathfrak{B}}^2 \widehat{f}\} = \widehat{r} < 1 \quad (\text{A2.14})$$

falls wir überdies noch  $\widehat{f}$  normiert, also

$$\|\widehat{f}\|^2 = \{\widehat{f}, \widehat{f}\} = 1 \quad (\text{A2.15})$$

voraussetzen. Im übrigen bleiben die Beziehungen unverändert, die wir mit dem Hilfssatz beweisen wollen.

Nun sei  $g$  ein beliebiges, zu  $\widehat{f}$ ,  $\widehat{f}^{<1>}$  und  $\widehat{f}^{<2>}$  orthogonales Element des betrachteten Hilbert-Raumes. Falls überdies noch  $\mu_0$  ein einfacher Eigenwert ist, können wir aus den Voraussetzungen von Satz 9 herleiten

$$\{g, \widehat{\mathfrak{B}}^2 g\} - \{g, g\} \geq 0 \quad (\text{A2.16})$$

Dies folgt sofort aus der Überlegung, daß an  $g$  nur Teile des Spektrums von  $\widehat{\mathfrak{B}}$  mit  $|\mu| \geq 1$  beteiligt sein können. Das Gleichheitszeichen ist überdies nur dann möglich, wenn wenigstens zu einem der Eigenwerte  $\mu_1, \mu_2$  mehrere Eigenelemente gehören (vgl. dazu Satz 2, § 2.5). Damit läßt sich  $\widehat{f}$  in der Form schreiben

$$\widehat{f} = \alpha_0 \widehat{f}^{<0>} + \alpha_1 \widehat{f}^{<1>} + \alpha_2 \widehat{f}^{<2>} \quad (\text{A2.17})$$

Aus (A2.15) wird damit

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \{g, g\} = 1 \quad (\text{A2.18})$$

und aus (A2.14)

$$\mu_0^2 \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \{g, \widehat{\mathfrak{B}}^2 g\} = \widehat{r} \quad (\text{A2.19})$$

und man erhält durch Subtraktion beider Gleichungen

$$(1 - \mu_0^2) \alpha_0^2 = 1 - \widehat{r} - \{g, \widehat{\mathfrak{B}}^2 g\} - \{g, g\} \quad (\text{A2.20})$$

Aus  $1 - \mu_0^2 > 0$  und (A2.16) folgert man, daß  $\alpha_0^2$  seinen kleinsten, mit (A2.14–15) verträglichen Wert für  $g = 0$  annimmt. Nun ist aber wegen (A2.15)

$$\alpha_0^2 = \cos^2(\angle x_0) = \cos^2(\widehat{f}, \widehat{f}^{<0>}) \quad (\text{A2.21})$$

Also erhält man für  $g = 0$  mit dem kleinsten  $\alpha_0^2$  den größten Winkel  $\angle x_0$  für festes  $\widehat{r}$  und festes  $\mu_0$ . q. e. d.

Die Annahme, daß nur drei Eigenelemente  $\widehat{f}^{<1>}, \widehat{f}^{<0>}, \widehat{f}^{<2>}$  zu den Eigenwerten  $\mu_1, \mu_0, \mu_2$  an  $\widehat{f}$  beteiligt sind, ist also die im Sinne der Abschätzungen (A2.8, 10, 12)

ungünstigste Annahme, womit der Beweis vollständig ist für den Fall, daß  $\mu_1$  und  $\mu_2$  einfache oder mehrfache Eigenwerte bzw. Schranken für Eigenwerte sind und  $\mu_0$  ein einfacher Eigenwert ist. Wenn dagegen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  Randpunkte eines Kontinuums bzw. Schranken für derartige Randpunkte sind, so kann man an die Überlegungen im Zusammenhang mit (2.5.70) anknüpfen. Der Beweis des Hilfssatzes und damit von Satz 9b, c) ergibt sich dann, wenn man in (2.5.70) die Folge  $\epsilon_{\mu + \Delta_i \mu} - \epsilon_{\mu - \Delta_i \mu}$  durch die Folgen  $\epsilon_{\mu_1} - \epsilon_{\mu_1 - \Delta_i \mu}$  bzw.  $\epsilon_{\mu_2 + \Delta_i \mu} - \epsilon_{\mu_2}$  ersetzt.

Wir haben noch den Fall eines mehrfachen Eigenwertes  $\mu_0$  zu untersuchen. Es gibt dann unter den Eigelementen zum Eigenwert  $\mu_0$  nach Satz 2, § 2.5 ein spezielles Eigelement  $f_{(f)}$ , welches durch Normierung aus (2.5.14) hervorgeht. Denken wir uns nun in (A2.17) dieses Eigelement  $f_{(f)}$  für  $f$  eingesetzt, so ist zunächst nach Voraussetzung das Element  $g$  orthogonal zu  $f_{(f)}$ . Es kann dann aber nach Satz 2, § 2.5 auch kein anderes Eigelement zum Eigenwert  $\mu_0$  enthalten; andernfalls würde die Entwicklung (A2.17) auf einen Widerspruch führen, und dasselbe gilt für alle Elemente, die durch Anwendung eines Polynoms in  $\mathfrak{B}$  auf  $g$  daraus hervorgehen.  $g$  darf also orthogonal zu sämtlichen Eigelementen zum Eigenwert  $\mu_0$  vorausgesetzt werden, und damit bleiben sämtliche Schlüsse gültig, die bei der Herleitung von (A2.16) sowie der folgenden Gleichungen benutzt wurden. Der einzige Unterschied gegenüber dem Fall des einfachen Eigenwertes  $\mu_0$  liegt darin, daß die Abschätzungen (A2.8, 10, 12) nur für eine ganz bestimmte Linearkombination seiner Eigelemente gelten. Damit ist der Beweis von Satz 9 vollständig.

Wir bemerken noch, daß sich die Sätze 7 und 9 auch auf Operatoren mit nicht beschränktem oder nur einseitig beschränktem reellen Spektrum ausdehnen lassen. Denn zu ihrem Beweis werden nur die  $\bar{\mu}$ -Kreise benötigt, welche nur von den benachbarten Teilen des Spektrums abhängen und daher nicht an die Beschränktheit des Spektrums gebunden sind. Schwieriger ist die Frage zu entscheiden, wann ein nicht beschränkter Operator ein reelles Spektrum hat. Da wir jedoch in dieser Arbeit nur mit beschränkten Operatoren zu tun haben, begnügen wir uns mit dieser Anmerkung und verweisen im übrigen auf die Literatur [153–155].

### Anhang 3: Ergänzungen zu § 2.5, Satz 6. Zerlegung eines Elements nach drei Eigelementen (symbolische Konstruktion)

Der Operator  $\mathfrak{B}$  besitze mindestens die drei Eigenwerte  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ ; ob außerdem noch andere Punkte der reellen Achse zu seinem Spektrum gehören, interessiert in diesem Zusammenhang nicht. Man konstruiert nun für ein beliebiges Element  $f$  den  $\mu$ -Kreis und die beiden  $\bar{\mu}$ -Kreise nach Corollar 1.3 zu diesen drei Eigenwerten. Wir bezeichnen als die Kreise 1, 2 und 3 mit den Mittelpunkten I, II und III jeweils die Kreise über den Durchmessern  $\overline{\mu_2 f, \mu_3 f}$ ,  $\overline{\mu_3 f, \mu_1 f}$  und  $\overline{\mu_1 f, \mu_2 f}$  (Abb. A3.1). Dann erhält man beispielsweise, falls  $f$  ganz in einem zu den Eigenwerten  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  gehörigen dreidimensionalen

Unterraum des *Hilbert*-Raums enthalten ist, den Winkel

$$\angle \alpha_2 = \angle (f, f) \quad (\text{A3.1})$$

durch die folgende Konstruktion. Man schlägt zunächst um  $\Pi$  den Kreis durch den Endpunkt von  $\mathfrak{B}f$ . Nun verbindet man entweder den Schnittpunkt mit Kreis 3 mit  $\mu_1 f$  oder den Schnittpunkt mit Kreis 1 mit  $\mu_3 f$ ; der Winkel der Verbindungsgeraden mit der Achse von  $f$  ist dann der gesuchte Winkel  $\angle \alpha_2$  nach (A3.1) (Abb. A3.1). Die entsprechende Konstruktion für

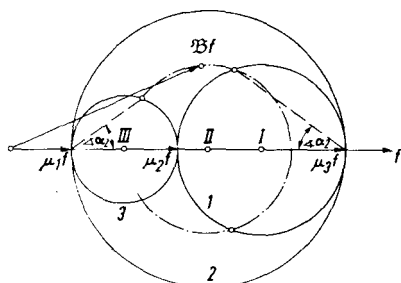


Abb. A3.1. Zerlegung von  $f$  nach drei Eigen-elementen

$$\angle \alpha_3 = \angle (f, f) \quad (\text{A3.2})$$

$$\angle \alpha_1 = \angle (f, f) \quad (\text{A3.3})$$

erhält man durch zyklische Vertauschung der Zahlen 1, 2 und 3.

Diese Konstruktion ergibt sich durch Umkehrung einer aus der Elastizitätstheorie bekannten Konstruktion im System der drei *Mohrschen* Kreise ([78], S. 62); sie ist offensichtlich genau dann für alle drei Winkel möglich, wenn der Endpunkt von  $\mathfrak{B}f$  zwischen den drei Kreisen liegt.

#### Anhang 4: Ergänzung zu § 3.4. Herleitung von (3.4.20) und (3.4.24)

Wir erhalten durch zweimalige Anwendung des *Gaußschen* Satzes mit den Abkürzungen (3.4.21)

$$\begin{aligned} \{\hat{f}', \hat{f}''\} &= \int_{(V_o)} \text{Ink } \hat{\chi} \cdots \hat{\varepsilon} \cdots \text{Ink } \hat{\chi} \, dV \\ &= \int_{(V_o)} \text{Ink } \hat{\chi} \cdots \hat{\varepsilon}^E \, dV \\ &= \int_{(V_o)} (\nabla \times \hat{\chi}) \cdots (\nabla \times \hat{\varepsilon}) \, dV \\ &= \oint_{(S_o)} (\nabla \times \hat{\chi}) \cdots \mathbf{n} \times \hat{\varepsilon} \, df - \int_{(V_o)} (\nabla \times \hat{\chi}) \cdots (\nabla \times \hat{\varepsilon}) \, dV \\ &= \oint_{(S_o)} (\nabla \times \hat{\chi} \times \mathbf{n}) \cdots \hat{\varepsilon} \, df - \int_{(V_o)} \hat{\chi} \cdots (\nabla \times \hat{\varepsilon} \times \nabla) \, dV \\ &= \oint_{(S_o)} (\nabla \times \hat{\chi} \times \mathbf{n}) \cdots \hat{\varepsilon} \, df - \oint_{(S_o)} \hat{\chi} \cdots (\nabla \times \hat{\varepsilon} \times \mathbf{n}) \, df + \int_{(V_o)} \hat{\chi} \cdots \hat{\eta} \, dV \end{aligned} \quad (\text{A4.1})$$

Die Oberflächenintegrale sind noch zu untersuchen. Dies geschieht unter Verwendung von (3.4.22–23).

Setzen wir zur Abkürzung

$$d\mathbf{f} = n d\mathbf{f} \quad (\text{A4.2})$$

und bezeichnen wir durch Pfeile die Wirksamkeit des Nabla-Operators, so erhalten wir aus der linken Seite von (3.4.24) durch Umformung und Anwendung des Satzes von Stokes

$$\begin{aligned}
 & \int_{(\bar{F})} (\nabla \times \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{n}) \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} d\mathbf{f} - \int_{(\bar{F})} \hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \mathbf{n}) d\mathbf{f} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{(F)} (\nabla \times \hat{\mathbf{z}} \nabla \times d\mathbf{f}) \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \int_{(F)} (\nabla \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{z}} \nabla) \cdot (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times d\mathbf{f}) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{(F)} \overrightarrow{(\nabla \times d\mathbf{f}) \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{z}})} - \frac{1}{2} \int_{(F)} \overrightarrow{\hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times d\mathbf{f}) \cdot \nabla} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{(F)} \overrightarrow{\nabla \cdot (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times d\mathbf{f}) \cdot \hat{\mathbf{z}}} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{(F)} d\mathbf{f} \cdot \overrightarrow{(\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \nabla) \cdot \hat{\mathbf{z}}} + \frac{1}{2} \int_{(F)} \overrightarrow{\hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \nabla) \cdot d\mathbf{f}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{(F)} \overrightarrow{\nabla \cdot (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot d\mathbf{f}} \\
 &= -\frac{1}{2} \oint_{(\bar{G})} d\mathbf{r} \cdot (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \nabla) \cdot \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{2} \int_{(F)} d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \nabla) \cdot \hat{\mathbf{z}} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \oint_{(\bar{G})} \hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int_{(F)} \hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \nabla) \cdot d\mathbf{f} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{(F)} \overrightarrow{\nabla \cdot (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot d\mathbf{f}} - \frac{1}{2} \int_{(F)} \overrightarrow{\nabla \cdot (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot d\mathbf{f}} \\
 &= -\frac{1}{2} \oint_{(\bar{G})} d\mathbf{r} \cdot (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{z}}) - (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \nabla) \cdot \hat{\mathbf{z}}) - \int_{(F)} \hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \nabla) \cdot d\mathbf{f} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{(F)} d\mathbf{f} \cdot \overrightarrow{(\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \nabla} + \frac{1}{2} \int_{(F)} \overrightarrow{\nabla \cdot (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot d\mathbf{f}} \quad (\text{A4.3})
 \end{aligned}$$

Dies ist mit (A4.2) die rechte Seite von (3.4.24).

### Anhang 5: Ergänzung zu § 3.4. Erweiterung von Satz 4 auf mehrfach zusammenhängende Körper

Die Auswertung von (3.4.24) für einen mehrfach zusammenhängenden Körper wird dadurch erschwert, daß sich bei Ausdehnung der einfach berandeten Teilfläche  $F$  über die ganze Oberfläche  $S_0$  des betrachteten Körpers  $K^\circ$  die Randkurve  $\mathfrak{C}$  nicht auf einen Punkt zusammenzieht, sondern in einen kanonischen Umlauf  $\mathfrak{C}_0$  ([98], Abb. 8a) übergeht, wie dies in Abb. A5.1a für das Beispiel des Torus dargestellt ist \*). Nun ist  $\hat{\mathfrak{E}}$  samt seinen Ableitungen auch im mehrfach zusammenhängenden Bereich  $V_0$  als einwertig vorausgesetzt; das Ergebnis (3.4.25) bleibt also weiter bestehen, wenn nur die räumliche Einwertigkeit von  $\hat{\mathfrak{U}}$  und  $\nabla \times \hat{\mathfrak{U}}$  ebenfalls gesichert ist. Denn in diesem Fall kann man wie beim einfach zusammenhängenden Körper mit Hilfe des *Gaußschen* Satzes zeigen, daß sich die beiden letzten Integrale in (3.4.24) gegenseitig wegheben, und das Verschwinden des Umlaufintegrals längs  $\mathfrak{C}_0$  ergibt sich aus der Überlegung, daß beim kanonischen Umlauf derselbe Weg zweimal in verschiedener Richtung durchlaufen wird, und daß sich somit die entgegengesetzten Durchlaufungsrichtungen entsprechenden Teilintegrale bei gleichem Integranden wegheben. Aber eben diese räumliche Einwertigkeit von  $\hat{\mathfrak{U}}$  und  $\nabla \times \hat{\mathfrak{U}}$  kann man bei mehrfach zusammenhängenden Körpern nicht mehr sicher voraussetzen. Damit kann aber nicht nur das Umlaufintegral einen von Null verschiedenen Wert annehmen; auch die Anwendung des *Gaußschen* Satzes auf die beiden letzten Integrale erfordert nun weitergehende Überlegungen.

Nach [98] ist die mögliche Mehrwertigkeit von  $\hat{\mathfrak{U}}$  und  $\nabla \times \hat{\mathfrak{U}}$  formal darauf zurückzuführen, daß es auf der Oberfläche eines mehrfach zusammenhängenden Körpers geschlossene Kurven gibt, die sich weder auf einen Punkt zusammenziehen noch zu einem kanonischen Umlauf ausdehnen lassen; insbesondere gehören dazu diejenigen Kurven, die entweder das Außengebiet oder das Innengebiet des Körpers genau einmal umschließen. Führt man längs einer solchen Kurve das Integral (3.4.23) aus, so kann man bei der Rückkehr zum Ausgangspunkt  $\mathbf{r}_0$  durchaus einen von Null verschiedenen Vektor  $\hat{\mathfrak{U}}$  erhalten, und dasselbe gilt für den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \nabla \times \hat{\mathfrak{U}}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \overline{\nabla} \times \hat{\mathfrak{z}}(\bar{\mathbf{r}}) \cdot d\bar{\mathbf{r}} \quad (\text{A5.1})$$

Aus der mechanischen Deutung eines solchen Umlaufintegrals läßt sich allerdings ableiten, daß eine derartige Mehrdeutigkeit („Sprung“) von  $\hat{\mathfrak{U}}$  und  $\nabla \times \hat{\mathfrak{U}}$  nur bei einem Umlauf um das Innengebiet auftreten kann [98].

\*) Oder – bei mehr als zweifach zusammenhängenden Körpern – in einen Umlauf, der sich stetig in einen kanonischen Umlauf überführen läßt. Unter einem kanonischen Umlauf verstehen wir das Umfahren der einfach zusammenhängenden Fläche  $F_0$ , die sich bei kanonischer Zerschneidung der Oberfläche  $S_0$  ergibt [160], derart, daß das Innere von  $F_0$  zur Linken liegt.

Denn nach einer nacheinander unabhängig von *Peretti* [117], *Bloch* [105] und *Günther* [118] gefundenen Integralformel liefert (3.4.23), ausgeführt über den Rand eines einfach zusammenhängenden Teilstücks  $F$  der Oberfläche (Inneres zur Linken) das negative Moment der in  $F$  angreifenden Kräfte bezüglich  $\xi_0$ , und (A5.1) ihre negative Resultierende ([98], Gl. (1.5–6)). Auf Grund dieser Deutung läßt sich für einen Umlauf um das Außengebiet nachweisen, daß ein Sprung von  $\hat{\Omega}$  oder  $\nabla \times \hat{\Omega}$  auf einen Widerspruch zu den Gleichgewichtsbedingungen führen würde, welchen die Spannungsfunktionen bei kräftefreier Oberfläche (und nach ([98], Ziff. 4b) sogar allgemein) genügen müssen ([98],

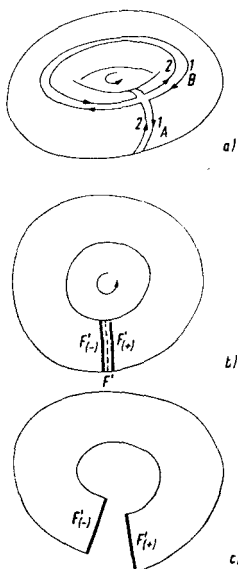


Abb. A5.1. Volterrasche Distorsionszustände

a) Kanonischer Umlauf am Torus

b) Zum pauschalen Volterraschen Distorsionszustand

c) Entspannung von b) mit versteiften Schnittrufern

S. 29 und Abb. 8d). Umfaßt aber der geschlossene Integrationsweg das Innere eines mehrfach zusammenhängenden Körpers, so kann man dem Sprung von  $\hat{\Omega}$  und  $\nabla \times \hat{\Omega}$  einen Sinn beilegen, wenn man den Körper in einer vom Integrationsweg berandeten Fläche aufschneidet (Abb. A5.1b, c). Man erkennt, daß die *Perettischen* Formeln dann gerade die Kraft und das Moment ergeben, die das Material der anderen Seite vor dem Durchtrennen auf den Querschnitt  $F'_{(-)}$  ausgeübt hat; im einfachsten Fall, nämlich bei sehr dünnen Querschnitten, handelt es sich um Biege- und Drillmoment sowie Quer- und Längskraft eines Ringbalkens mit Eigenspannungen. Wir bezeichnen die resultierende Kraft und das Moment zusammenfassend als die „innere Dynamik“ des betrachteten Querschnitts.

Es ist seit *Volterra* [107] bekannt, daß das Auftreten innerer Dynamen bei mehrfach zusammenhängenden Körpern, in deren Innern die Inkompatibilität  $\eta$  verschwindet, gekoppelt ist an *Volterrasche* Distorsionszustände, d. h. elastische Dehnungsfelder, aus denen sich trotz Erfüllung der Kompatibilitäts-

bedingung (3.3.12) bei einem Umlauf um das Außengebiet keine einwertige Verschiebung aus der *Cesàroschen* Integralformel [1, 2, 98, 107] berechnen läßt. Vielmehr erhält man nach einem Umlauf  $\mathfrak{C}_\lambda$  um das Außengebiet am  $\lambda$ -ten Loch der „Brezel“ [98, 160] den Verschiebungssprung (*Burgers-Vektor*)

$$\mathfrak{b}_\lambda(\mathfrak{r}) = \mathfrak{b}_\lambda^0 + \mathfrak{d}_\lambda \times (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0) \quad (\text{A5.2})$$

welcher einer starren Bewegung zweier Schnittflächen der in Abb. A5.1 skizzierten Art gegeneinander entspricht.  $\mathfrak{b}_\lambda^0$  ist der Verschiebungssprung im festen Translationspunkt  $\mathfrak{r}_0$  und  $\mathfrak{d}_\lambda$  der „Drehsprung“. Die innere Dyname am  $\lambda$ -ten Loch erhält man durch Ausführung der *Perettischen* Integrale auf den Kurven  $\mathfrak{C}_\lambda^*$  um das Innengebiet, die sich bei einer kanonischen Zerschneidung [160] der Oberfläche\*) ergeben und deren Umlaufsinn mit dem zugehörigen, zur Bestimmung von Verschiebungs- und Drehsprung ausgeführten Umlauf um das Außengebiet eine Rechtsschraube ergibt ([98], Abb. 8a). Sie wird beschrieben durch die Ortsabhängigkeit des zugehörigen Moments

$$\vec{M}_\lambda(\mathfrak{r}) = \vec{M}_\lambda^0 + \vec{P}_\lambda \times (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0) \quad (\text{A5.3})$$

welche der üblichen Kräftegeometrie am starren Körper entspricht.  $\vec{M}_\lambda^0$  ist das Moment der inneren Dyname bezüglich des bereits in (A5.2) aufgetretenen Translationspunktes  $\mathfrak{r}_0$  und  $\vec{P}_\lambda$  die resultierende Kraft der inneren Dyname. Am  $\lambda$ -ten Loch gilt

$$\vec{M}_\lambda^0 = - \text{Sprung}(\mathfrak{A})_\lambda = - \oint_{(\mathfrak{C}^*)} d\bar{\mathfrak{r}} \cdot \left( \underline{\chi}(\bar{\mathfrak{r}}) + (\underline{\chi}(\bar{\mathfrak{r}}) \times \bar{\nabla}) \times (\bar{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}_0) \right) \quad (\text{A5.4})$$

$$\vec{P}_\lambda = - \text{Sprung} \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathfrak{A} \right)_\lambda = - \oint_{(\mathfrak{C}^*)} \bar{\nabla} \times \underline{\chi}(\bar{\mathfrak{r}}) \cdot d\bar{\mathfrak{r}} \quad (\text{A5.5})$$

auf dem Umlauf  $\mathfrak{C}_\lambda^*$  um das Innengebiet.

Durch Erweiterung der Überlegungen von ([98], Ziff. 5) oder der auf anderem Wege gewonnenen Ergebnisse von *Volterra* [107] findet man nun die Wechselwirkungsenergie zweier *Volterrascher* Distorsionszustände  $\hat{f}'''$  und  $\hat{f}'''$  in einem  $n$ -fach zusammenhängenden Körper

$$\begin{aligned} \{\hat{f}''', \hat{f}'''\} &= \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n-1} (\hat{P}_{\lambda\mu} \cdot \hat{\mathfrak{b}}_\mu^0 + \hat{M}_{\lambda\mu}^0 \cdot \hat{\mathfrak{d}}_\mu) \\ &= \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n-1} (\hat{P}_{\lambda\mu} \cdot \hat{\mathfrak{b}}_\mu^0 + \hat{M}_{\lambda\mu}^0 \cdot \hat{\mathfrak{d}}_\mu) \end{aligned} \quad (\text{A5.6})$$

Hier sind  $\vec{P}_{\lambda\mu}$  und  $\vec{M}_{\lambda\mu}^0$  die Beiträge von Verschiebungs- und Drehsprung am  $\lambda$ -ten Loch zur inneren Dyname am  $\mu$ -ten Loch; sie sind jeweils durch Lösung

\*) Oder bei einer Zerschneidung, die sich stetig in eine kanonische Zerschneidung überführen läßt.



eines Randwertproblems zu bestimmen ([98], Ziff. 5b). Gl (A5.6) kann als das Analogon zum *Betti-Rayleighschen* Satz für reine *Volterrasche* Distorsionszustände betrachtet werden.

Wir haben nun die Definition der *Volterraschen* Distorsionszustände so zu erweitern, daß sie auch noch für beliebige Eigenspannungszustände in mehrfach zusammenhängenden Körpern brauchbar ist, das heißt also auch für die Fälle, in denen die Inkompatibilität  $\eta$  im Innern des Körpers nicht verschwindet. Die Schwierigkeit liegt in diesem allgemeineren Fall darin, daß Verschiebungs- und Drehsprung jetzt nicht mehr gleich sind für jeden Umlauf auf der Oberfläche oder im Innern des Körpers um dasselbe Loch, sondern daß sie jetzt wegen  $\eta \neq 0$  im Innern und auf der Oberfläche nach ([98], Gl. (1.5–6)) von der speziellen Form des Umlaufs abhängen.

Grundsätzlich sind zwei Wege möglich. Der eine ergibt sich aus der Überlegung, daß die oben abgeleiteten Beziehungen für den Vektor  $\mathfrak{A}$  nur auf den Gleichgewichtsbedingungen beruhen, also auch für  $\eta \neq 0$  unverändert weiter gelten. Daraus folgt die Möglichkeit, einen „pauschalen *Volterraschen* Distorsionszustand“ aus den inneren Dynamen, also den Sprüngen von  $\mathfrak{A}$  und  $\nabla \times \mathfrak{A}$  zu definieren, und zwar als denjenigen *Volterraschen* Distorsionszustand, welcher an demselben Körper für  $\eta = 0$  im Innern genau dieselben inneren Dynamen hervorrufen würde. Die Realisierung dieses pauschalen *Volterraschen* Distorsionszustandes kann man sich im Gedankenversuch etwa so vorstellen, daß man den Körper durch Zerschneiden in geeigneten Querschnitten  $F'$  einfach zusammenhängend macht derart, daß man vor dem Durchtrennen die beiden „Ufer“  $F'_{(+)}$  und  $F'_{(-)}$  bis zur völligen Starrheit versteift (Abb. A5.1b). Nach dem Schnitt bilden diese Versteifungen „Krustenhüllen“ ([98], Ziff. 2b), welche eine Entspannung des Körpers nur so weit zulassen, als dies durch eine starre Bewegung der Schnittflächenufer gegeneinander möglich ist; die Inkompatibilität  $\eta$  im Innern des Körpers bleibt bei dieser modifizierten Schnittoperation unverändert. Die Verschiebungs- und Drehsprünge des pauschalen *Volterraschen* Distorsionszustandes erhält man nach Umkehrung des Vorzeichens aus den Relativbewegungen der versteiften Schnittflächenufer (Abb. A5.1c).

Diese Definition des pauschalen *Volterraschen* Distorsionszustandes hat den Vorteil, daß sie nur von dem betrachteten Körper und seinem elastischen Zustand abhängt. Trotzdem ist sie für unsere Zwecke unbrauchbar, da sich der pauschale *Volterrasche* Distorsionszustand nicht ohne Lösung von Randwertproblemen des in ([98], Ziff. 5b) beschriebenen Typs aus der Extradehnung  $\varepsilon^Q$  bestimmen läßt; wir benötigen aber zur Umformung von (3.4.24) Größen, die sich einerseits aus der als bekannt vorausgesetzten Spannungsfunktion  $\hat{z}$  des Zustandes  $\hat{f}'$  und andererseits aus der gegebenen Extradehnung  $\hat{\varepsilon}^Q$  des Zustandes  $\hat{f}'$  durch algebraische Umformungen, Differentiationen oder Quadraturen bestimmen lassen. Wir definieren daher mit Hilfe eines festen Systems von Umläufen  $\mathfrak{C}_\lambda$  um das Außengebiet am  $\lambda$ -ten Loch den „bezogenen *Volterraschen* Distorsionszustand zu den Umläufen  $\mathfrak{C}_\lambda$ “ durch die Verschiebungs- und Drehsprünge

$$b^0(\mathfrak{C}_\lambda) = \oint_{(\mathfrak{C}_\lambda)} d\bar{\mathbf{r}} \cdot (\underline{\varepsilon}(\bar{\mathbf{r}}) + (\underline{\varepsilon}(\bar{\mathbf{r}}) \times \bar{\nabla}) \times (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)) \quad (\text{A5.7})$$

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{C}_\lambda) = \oint_{(\mathfrak{C}_\lambda)} \bar{\nabla} \times \underline{\varepsilon}(\bar{\mathbf{r}}) \cdot d\bar{\mathbf{r}} \quad (\text{A5.8})$$

wobei unter

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^E \quad (\text{A5.9})$$

die elastische Dehnung (3.3.24) zu verstehen ist. Da die Integrale (A5.7–8) definitionsgemäß verschwinden müssen, wenn man an Stelle von  $\underline{\varepsilon}^E$  die Gesamtdehnung  $\underline{\varepsilon}^G$  einsetzt ([98], Ziff. 3), folgt mit (3.3.26)

$$b^0(\mathfrak{C}_\lambda) = - \oint_{(\mathfrak{C}_\lambda)} d\bar{\mathbf{r}} \cdot (\underline{\varepsilon}^Q(\bar{\mathbf{r}}) + (\underline{\varepsilon}^Q(\bar{\mathbf{r}}) \times \bar{\nabla}) \times (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)) \quad (\text{A5.10})$$

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{C}_\lambda) = - \oint_{(\mathfrak{C}_\lambda)} \bar{\nabla} \times \underline{\varepsilon}^Q(\bar{\mathbf{r}}) \cdot d\bar{\mathbf{r}} \quad (\text{A5.11})$$

Dies ist die gesuchte Darstellung des bezogenen *Volterraschen* Distorsionszustandes zu den Umläufen  $\mathfrak{C}_\lambda$ ; sie geht, wie verlangt, durch Differentiation und Quadratur aus der gegebenen Extradehnung  $\underline{\varepsilon}^Q$  hervor.

Wir wenden dies auf das Umlaufintegral auf der rechten Seite von (3.4.24) an, das wir nun über einen kanonischen Umlauf  $\mathfrak{C}_0$  erstrecken\*), d. h. einen Umlauf um die gesamte Oberfläche des Körpers, der durch zweimalige Durchlaufung der Schnittkurve einer kanonischen Zerschneidung [160] der Oberfläche gebildet wird ([98], Ziff. 5), und wie er in Abb. A5.1a für das Beispiel des Torus aufgezeichnet ist. Man erkennt, daß sich dieser kanonische Umlauf zerlegen läßt in „Doppelumläufe“ vom Typ A um das Innengebiet und vom Typ B um das Außengebiet des Körpers. Die Doppelumläufe vom Typ A um das Innengebiet tragen zu dem Umlaufintegral nichts bei. Denn  $\hat{\underline{\varepsilon}}$  und  $\hat{\underline{\varepsilon}} \times \bar{\nabla}$  sind von vornherein eindeutige Ortsfunktionen, während  $\hat{\underline{\mathfrak{Q}}}$  und  $\bar{\nabla} \times \hat{\underline{\mathfrak{Q}}}$ , wie oben gezeigt, nur bei einem Umlauf um das Innengebiet springen können, also für die beiden Ufer 1 und 2 eines Doppelumlaufs vom Typ A an derselben Stelle denselben Wert haben müssen. Entsprechend dem entgegengesetzten Durchlaufungssinn beider Ufer verschwindet also der Beitrag aller Doppelumläufe vom Typ A.

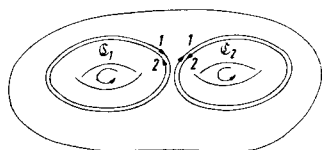
Das Linienintegral über einen kanonischen Umlauf reduziert sich also auf die Beiträge der Doppelumläufe vom Typ B um jedes Loch der Brezel. Wir verwenden nun die Ufer 2 der Doppelumläufe vom Typ B als feste Umläufe  $\mathfrak{C}_\lambda$  zur Definition der bezogenen *Volterraschen* Distorsionszustände nach (A5.7–11): die jeweiligen Ufer 1 entsprechen dann der gleichen, aber im entgegengesetzten Sinn durchlaufenen Kurve, wie dies in Abb. A5.2a für einen dreifach zusammenhängenden Körper skizziert ist\*\*). Bezeichnen wir mit  $\hat{\underline{\mathfrak{Q}}}_1$  und  $\hat{\underline{\mathfrak{Q}}}_2$

\*) Vgl. Fußnote S. 325. Wir weisen auf diese Erweiterung im folgenden nicht mehr besonders hin.

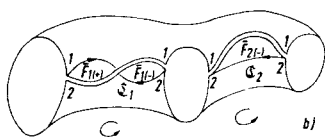
\*\*) Zur Definition der Zusammenhangszahlen vgl. ([98], Ziff. 1d). Danach ist ein Körper mit  $n - 1$  Löchern  $n$ -fach zusammenhängend und wird von einer  $(2n - 1)$ -fach zusammenhängenden Oberfläche begrenzt.

bzw.  $(\nabla \times \hat{\mathfrak{Q}})_1$  und  $(\nabla \times \hat{\mathfrak{Q}})_2$  die Werte der Funktion  $\hat{\mathfrak{Q}}$  bzw.  $\nabla \times \hat{\mathfrak{Q}}$  auf den Ufern 1 und 2 des jeweiligen Doppelumlaufs, so erhalten wir

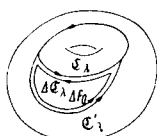
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \oint_{(\mathfrak{C}_0)} d\mathfrak{r} \cdot \left( (\hat{\varepsilon} \times \nabla) \cdot \hat{\mathfrak{Q}} - \hat{\varepsilon} \cdot (\nabla \times \hat{\mathfrak{Q}}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \oint_{(\mathfrak{C}_\lambda)} d\mathfrak{r} \cdot \left( (\hat{\varepsilon} \times \nabla) \cdot (\hat{\mathfrak{Q}}_2 - \hat{\mathfrak{Q}}_1) - \hat{\varepsilon} \cdot ((\nabla \times \hat{\mathfrak{Q}})_2 - (\nabla \times \hat{\mathfrak{Q}})_1) \right) \end{aligned} \quad (\text{A5.12})$$



a/



b/



c/

Abb. A5.2. Bezogene *Volterrasche* Distorsionszustände

a) Doppelumläufe vom Typ B

b) Zerschneidung des Außengebiets

c) Verbiegung eines Umlaufs  $\mathfrak{C}_\lambda$ 

Unter Beachtung der Rechtsschraubenregel für zusammengehörige Umläufe um Innen- und Außengebiet leitet man aus (A5.3–5) ab

$$\hat{\mathfrak{Q}}_2 - \hat{\mathfrak{Q}}_1 = - \hat{\vec{M}}_\lambda(\mathfrak{r}) = - \hat{\vec{M}}_\lambda^0 - \hat{\vec{P}}_\lambda \times (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0) \quad (\text{A5.13})$$

$$(\nabla \times \hat{\mathfrak{Q}})_2 - (\nabla \times \hat{\mathfrak{Q}})_1 = - 2 \hat{\vec{P}}_\lambda \quad (\text{A5.14})$$

Durch Einsetzen in (A5.12) und Umformung nach (A5.7–8) folgt schließlich für das auf einem kanonischen Umlauf ausgeführte Linienintegral in (3.4.24)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \oint_{(\mathfrak{C}_0)} d\mathfrak{r} \cdot (\dots) \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \oint_{(\mathfrak{C}_\lambda)} d\mathfrak{r} \cdot \left( (\hat{\varepsilon} \times \nabla) \cdot \hat{\vec{M}}_\lambda^0 + (\hat{\varepsilon} \times \nabla) \cdot (\hat{\vec{P}}_\lambda \times (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0)) - 2 \hat{\varepsilon} \cdot \hat{\vec{P}}_\lambda \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left( -\hat{\vec{M}}_{\lambda}^0 \cdot \oint_{(\mathfrak{C}_{\lambda})} \nabla \times \hat{\vec{\varepsilon}} \cdot d\vec{r} - \hat{\vec{P}}_{\lambda} \cdot \oint_{(\mathfrak{C}_{\lambda})} (2\hat{\vec{\varepsilon}} + (\vec{r} - \vec{r}_0) \times (\nabla \times \hat{\vec{\varepsilon}})) \cdot d\vec{r} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left( \hat{\vec{M}}_{\lambda}^0 \cdot \hat{\vec{b}}(\mathfrak{C}_{\lambda}) + \hat{\vec{P}}_{\lambda} \cdot \hat{\vec{b}}^0(\mathfrak{C}_{\lambda}) \right) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \hat{\vec{P}}_{\lambda} \cdot \oint_{(\mathfrak{C}_{\lambda})} \hat{\vec{\varepsilon}} \cdot d\vec{r} \quad (\text{A5.15})
\end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir die beiden letzten Flächenintegrale in (3.4.24), die wir nun über die von dem kanonischen Umlauf  $\mathfrak{C}_0$  berandete Fläche  $F_0$  ausgeführt denken, welche die ganze Oberfläche  $S_0$  überdeckt. Wegen des Sprungs von  $\hat{\vec{Q}}$  und  $\nabla \times \hat{\vec{Q}}$  auf den Doppelumläufen vom Typ B läßt sich dieses Integral nicht mehr durch ein Integral über die geschlossene Oberfläche  $S_0$  ersetzen; dies wäre aber die Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Gaußschen Satzes. Es besteht nun entweder die Möglichkeit, die berandete Fläche  $F_0$  unter geeigneter Berücksichtigung der Sprungstellen — etwa durch Einführung von Distributionen auf den Kurven  $\mathfrak{C}_{\lambda}$  [88–90] — zur vollen Oberfläche  $S_0$  zu ergänzen, oder aber den Gaußschen Satz statt auf das Innere des betrachteten Körpers  $K^\circ$  auf einen anderen räumlichen Bereich anzuwenden, in welchem sich  $\hat{\vec{Q}}$  und  $\nabla \times \hat{\vec{Q}}$  eindeutig erklären lassen.

Einen solchen räumlichen Bereich erhält man, wenn man das Außengebiet durch Flächen  $\bar{F}_{\lambda}$  mit den beiden Schnittrufern  $\bar{F}_{\lambda(+)}$  und  $\bar{F}_{\lambda(-)}$  zertrennt derart, daß das Ufer  $\bar{F}_{\lambda(-)}$  durch das Ufer 2 des Doppelumlaufs um das  $\lambda$ -te Loch, also den Umlauf  $\mathfrak{C}_{\lambda}$ , und das Ufer  $\bar{F}_{\lambda(+)}$  durch das Ufer 1 des Doppelumlaufs aufgespannt wird (Abb. A5.2b). Im Außengebiet der durch die Zusammensetzung der Flächen  $F_0$ ,  $\bar{F}_{\lambda(+)}$  und  $\bar{F}_{\lambda(-)}$  gebildeten einfach zusammenhängenden und geschlossenen Fläche  $F^*$  können die Funktionen  $\hat{\vec{Q}}$  und  $\nabla \times \hat{\vec{Q}}$  durch Fortsetzung von der Fläche  $F^*$  ins Außengebiet eindeutig erklärt werden; man kann diese Fortsetzung, und ebenso die Fortsetzung der Funktion  $\hat{\vec{\varepsilon}}$ , derart wählen, daß die Integranden der beiden letzten Flächenintegrale in (3.4.24) nach außen stärker als das reziproke Abstandsquadrat abnehmen und die Ausdrücke, die sich daraus nach Ersatz von  $n \, d\vec{f}$  durch  $\nabla$  ergeben, stärker als die dritte Potenz des reziproken Abstandes. Damit ist die Anwendbarkeit des Gaußschen Satzes auf das Außengebiet der Fläche  $F^*$  gesichert.

Bezeichnen wir nun zur Abkürzung des ins Innengebiet weisenden Normalenvektor des Flächenelements von  $F^*$  mit

$$d\vec{f} = -d\vec{f} = -n \, d\vec{f} \quad (\text{A5.16})$$

und das Außengebiet von  $F^*$  mit  $\bar{V}^*$ , so erhalten wir durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf die beiden letzten, über  $F^*$  erstreckten Flächenintegrale von (3.4.24)

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \oint_{(F^*)} \mathbf{n} \cdot (\overrightarrow{\nabla \times \hat{\varepsilon}} \times \hat{\mathbf{q}}) \cdot \nabla \, df + \frac{1}{2} \oint_{(F^*)} \nabla \cdot (\overrightarrow{\nabla \times \hat{\varepsilon}} \times \hat{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{n} \, df \\
& = \frac{1}{2} \oint_{(F^*)} d\vec{f} \cdot (\dots) \cdot \nabla - \frac{1}{2} \oint_{(F^*)} \nabla \cdot (\dots) \cdot d\vec{f} \\
& = \frac{1}{2} \int_{(\bar{V}^*)} \nabla \cdot (\dots) \cdot \nabla \, dV - \frac{1}{2} \int_{(\bar{V}^*)} \nabla \cdot (\dots) \cdot \nabla \, dV = 0 \quad (\text{A5.17})
\end{aligned}$$

Andererseits gilt für eine beliebige, vektorielle oder tensorielle Ortsfunktion  $A = A(\mathbf{r})$ , wenn man  $\bar{F}_\lambda$  — gleich dem Ufer  $\bar{F}_{\lambda(-)}$  — so orientiert, daß die Fläche zur Linken des Umlaufs  $\mathcal{C}_\lambda$  liegt:

$$\begin{aligned}
\oint_{(\bar{F}^*)} d\vec{f} \cdot A &= - \int_{(\bar{F}_0)} \mathbf{n} \cdot A \, df + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left( \int_{(\bar{F}_{\lambda(-)})} d\vec{f} \cdot A - \int_{(\bar{F}_{\lambda(+)})} d\vec{f} \cdot A \right) \\
&= - \int_{(\bar{F}_0)} \mathbf{n} \cdot A \, df + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \int_{(\bar{F}_\lambda)} d\vec{f} \cdot (A_2 - A_1) \quad (\text{A5.18})
\end{aligned}$$

wo  $A_2$  und  $A_1$  die Werte der Funktion  $A$  auf  $\bar{F}_{\lambda(+)}$  und  $\bar{F}_{\lambda(-)}$  sind. Somit erhalten wir aus (A5.17) nach Umformung mit (A5.13–14), (A5.8) und ([98], Gl. (5.2–3))

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_{(F_0)} \mathbf{n} \cdot (\dots) \cdot \nabla \, df + \frac{1}{2} \int_{(F_0)} \nabla \cdot (\dots) \cdot \mathbf{n} \, df \\
& = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left( - \int_{(\bar{F}_\lambda)} d\vec{f} \cdot (\overrightarrow{\nabla \times \hat{\varepsilon}} \times (\hat{\mathbf{q}}_2 - \hat{\mathbf{q}}_1)) \cdot \nabla + \int_{(\bar{F}_\lambda)} \nabla \cdot (\overrightarrow{\nabla \times \hat{\varepsilon}} \times (\hat{\mathbf{q}}_2 - \hat{\mathbf{q}}_1)) \cdot d\vec{f} \right) \\
& = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left( \int_{(\bar{F}_\lambda)} d\vec{f} \cdot (\overrightarrow{\nabla \times \hat{\varepsilon}} \times \hat{\mathbf{M}}_\lambda^0) \cdot \nabla + \int_{(\bar{F}_\lambda)} d\vec{f} \cdot (\overrightarrow{\nabla \times \hat{\varepsilon}} \times (\hat{\mathbf{P}}_\lambda \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))) \cdot \nabla \right. \\
& \quad \left. - \int_{(\bar{F}_\lambda)} \nabla \cdot (\overrightarrow{\nabla \times \hat{\varepsilon}} \times \hat{\mathbf{M}}_\lambda^0) \cdot d\vec{f} - \int_{(\bar{F}_\lambda)} \nabla \cdot (\overrightarrow{\nabla \times \hat{\varepsilon}} \times (\hat{\mathbf{P}}_\lambda \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))) \cdot d\vec{f} \right) \\
& = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left( - \int_{(\bar{F}_\lambda)} d\vec{f} \cdot (\nabla \times \hat{\varepsilon} \times \nabla) \cdot \hat{\mathbf{M}}_\lambda^0 + \int_{(\bar{F}_\lambda)} d\vec{f} \cdot (\nabla \times \hat{\varepsilon}) \cdot (\overrightarrow{\nabla \times ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \hat{\mathbf{P}}_\lambda)}) \right. \\
& \quad \left. + 0 - \int_{(\bar{F}_\lambda)} \nabla \cdot (\overrightarrow{\nabla \times \hat{\varepsilon}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) \cdot \hat{\mathbf{P}}_\lambda \cdot d\vec{f} + \int_{(\bar{F}_\lambda)} \nabla \cdot (\nabla \times \hat{\varepsilon} \cdot \hat{\mathbf{P}}_\lambda) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot d\vec{f} \right) \\
& = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left( - \oint_{(\mathcal{C}_\lambda)} d\mathbf{r} \cdot (\hat{\varepsilon} \times \nabla) \cdot \hat{\mathbf{M}}_\lambda^0 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{(\vec{F}_\lambda)} (d\vec{f} \cdot (\nabla \times \hat{\varepsilon} \times \nabla) \times (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \cdot \hat{P}_\lambda + \int_{(\vec{F}_\lambda)} d\vec{f} \cdot (\nabla \times \hat{\varepsilon}) \cdot ((\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \nabla \cdot \hat{P}_\lambda \\
& \quad - \hat{P}_\lambda \nabla \cdot (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)) - \int_{(\vec{F}_\lambda)} (\nabla \times \hat{\varepsilon}) \cdot \cdot I \hat{P}_\lambda \cdot d\vec{f} - \int_{(\vec{F}_\lambda)} d\vec{f} \cdot (\nabla \times \hat{\varepsilon}) \cdot \hat{P}_\lambda) \\
& = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left( \hat{M}_\lambda^0 \cdot \hat{\mathfrak{b}}(\mathfrak{C}_\lambda) + \hat{P}_\lambda \cdot \hat{\mathfrak{b}}^0(\mathfrak{C}_\lambda) - 2 \hat{P}_\lambda \cdot \oint_{(\mathfrak{C}_\lambda)} \hat{\varepsilon} \cdot d\mathfrak{x} - 0 + \hat{P}_\lambda \cdot \oint_{(\mathfrak{C}_\lambda)} \hat{\varepsilon} \cdot d\mathfrak{x} \right)
\end{aligned} \tag{A5.19}$$

Nun erstrecken wir die beiden Flächenintegrale auf der linken Seite von (3.4.24) sowie das restliche Flächenintegral auf der rechten Seite über die von dem kanonischen Umlauf  $\mathfrak{C}_0$  berandete Fläche  $F_0$  und beachten, daß wir zwar für die einwertigen Funktionen unter den Integralen der linken Seite, nicht aber für den mehrwertigen Integranden auf der rechten Seite die berandete Fläche  $F_0$  durch die geschlossene Oberfläche  $S_0$  ersetzen dürfen. Damit erhalten wir nach Zusammenfassung von (3.4.24), (A5.15) und (A5.19)

$$\begin{aligned}
& \int_{(S_0)} (\nabla \times \hat{\chi} \times \mathfrak{n}) \cdot \hat{\varepsilon} df - \int_{(S_0)} \hat{\chi} \cdot (\nabla \times \hat{\varepsilon} \times \mathfrak{n}) df \\
& = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left( \hat{M}_\lambda^0 \cdot \hat{\mathfrak{b}}(\mathfrak{C}_\lambda) + \hat{P}_\lambda \cdot \hat{\mathfrak{b}}^0(\mathfrak{C}_\lambda) \right) - \int_{(F_0)} \hat{\mathfrak{z}} \cdot \text{Ink } \hat{\varepsilon} \cdot \mathfrak{n} df
\end{aligned} \tag{A5.20}$$

Die Verschiebungssprünge  $\hat{\mathfrak{b}}^0(\mathfrak{C}_\lambda)$  und die Drehsprünge  $\hat{\mathfrak{b}}(\mathfrak{C}_\lambda)$  des in  $\hat{f}''$  enthaltenen bezogenen *Volterraschen* Distorsionszustandes zu den Umläufen  $\mathfrak{C}_\lambda$  sind nach (A5.10–11) aus der Extradehnung  $\hat{\varepsilon}^Q$  zu berechnen.

Es ist nun klar, wie man bei mehrfach zusammenhängenden Körpern die Gleichungen (3.4.26–28) von Satz 4, § 3.4, zu ergänzen hat, und auch die Anwendung auf die Iteration mit Eigenspannungszuständen von § 3.6 sowie die gemischte Iteration von § 3.7 macht keine Schwierigkeiten mehr. Deshalb verzichten wir darauf, die notwendigen Ergänzungen der Formeln (3.4.26–28), (3.6.2–13) und (3.7.31–35, 40) durch die Beiträge der bezogenen *Volterraschen* Distorsionszustände ausdrücklich anzuschreiben. Die Endformeln von (3.6.13) und (3.7.40) bleiben jedenfalls erhalten und mit ihnen alle daraus gezogenen Folgerungen.

Natürlich hängen die bezogenen *Volterraschen* Distorsionszustände und mit ihnen ihre Beiträge zur elastischen Wechselwirkungsenergie  $\{\hat{f}'', \hat{f}'''\}$  von der willkürlich wählbaren Gestalt der Umläufe  $\mathfrak{C}_\lambda$  um das  $\lambda$ -te Loch ab. Dasselbe gilt freilich auch für das Flächenintegral auf der rechten Seite von (A5.20); man muß aber auf alle Fälle fordern können, daß die Summe der beiden Ausdrücke auf der rechten Seite von (A5.20) bei einer beliebigen Verbiegung des Umlaufs  $\mathfrak{C}_\lambda$  unverändert bleibt. Dies ist tatsächlich der Fall. Wir denken uns nach Abb. A5.2c den Umlauf  $\mathfrak{C}_\lambda$  zum Umlauf  $\mathfrak{C}'_\lambda$  verbogen; dadurch wird die vom „Differenzumlauf“  $\Delta \mathfrak{C}_\lambda$  berandete Fläche  $\Delta F_0$  auf der linken

Seite des Umlaufs zu  $F_0$  hinzugefügt und auf der rechten Seite wieder abgezogen. Für die neue Vektorfunktion  $\hat{\mathfrak{Q}}'$  in  $\Delta F_0$  gilt nach (A5.13)

$$\hat{\mathfrak{Q}}' = \hat{\mathfrak{Q}} + \Delta \hat{\mathfrak{Q}} = \hat{\mathfrak{Q}} - \hat{\vec{M}}_\lambda^0 - \hat{\vec{P}}_\lambda \times (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \quad (\text{A5.21})$$

Man sieht dies leicht ein, wenn man überlegt, daß die Sprungbeziehung (A5.13) für jede Lage von  $\mathfrak{C}'_\lambda$  beim Überstreichen von  $\Delta F_0$  gilt. Bezeichnen wir mit  $F'_0$  die durch die Verbiegung von  $\mathfrak{C}_\lambda$  in  $\mathfrak{C}'_\lambda$  abgeänderte Fläche  $F_0$ , so erhalten wir die zugehörige Veränderung des Flächenintegrals in (A5.20)

$$\begin{aligned} \Delta \oint_{(F_0)} \hat{\mathfrak{Q}} \cdot \text{Ink } \hat{\vec{\varepsilon}} \cdot \mathfrak{n} \, d\mathfrak{f} &= \oint_{(F'_0)} \hat{\mathfrak{Q}} \cdot \text{Ink } \hat{\vec{\varepsilon}} \cdot \mathfrak{n} \, d\mathfrak{f} - \oint_{(F_0)} \hat{\mathfrak{Q}} \cdot \text{Ink } \hat{\vec{\varepsilon}} \cdot \mathfrak{n} \, d\mathfrak{f} \\ &= \oint_{(\Delta F_0)} \hat{\mathfrak{Q}} \cdot \text{Ink } \hat{\vec{\varepsilon}} \cdot \mathfrak{n} \, d\mathfrak{f} = - \oint_{(\Delta F_0)} d\mathfrak{f} \cdot \text{Ink } \hat{\vec{\varepsilon}} \cdot \left( \hat{\vec{M}}_\lambda^0 + \hat{\vec{P}}_\lambda \times (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \right) \\ &= - \oint_{(\Delta F_0)} d\mathfrak{f} \cdot \text{Ink } \hat{\vec{\varepsilon}} \cdot \hat{\vec{M}}_\lambda^0 + \oint_{(\Delta F_0)} \left( d\mathfrak{f} \cdot \text{Ink } \hat{\vec{\varepsilon}} \times (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0) \right) \cdot \hat{\vec{P}}_\lambda \end{aligned} \quad (\text{A5.22})$$

Nach ([98], Gl. (5.3–4)) wird aber daraus

$$\Delta \oint_{(F_0)} \hat{\mathfrak{Q}} \cdot \text{Ink } \hat{\vec{\varepsilon}} \cdot \mathfrak{n} \, d\mathfrak{f} = \hat{\vec{M}}_\lambda^0 \cdot \Delta \hat{\mathfrak{d}}(\mathfrak{C}_\lambda) + \hat{\vec{P}}_\lambda \cdot \Delta \mathfrak{b}^0(\mathfrak{C}_\lambda) \quad (\text{A5.23})$$

wo  $\Delta \mathfrak{b}^0(\mathfrak{C}_\lambda)$  und  $\Delta \mathfrak{d}(\mathfrak{C}_\lambda)$  die mit der Verbiegung von  $\mathfrak{C}_\lambda$  verbundenen Veränderungen von Verschiebungs- und Drehsprung sind. Da  $\hat{\vec{M}}_\lambda^0$  und  $\hat{\vec{P}}_\lambda$  von der Gestalt des Umlaufs  $\mathfrak{C}_\lambda$  nicht abhängen, ist dies entgegengesetzt gleich der Veränderung des ersten Gliedes auf der rechten Seite von (A5.20). Die rechte Seite von (A5.20) ist also, wie es sein muß, invariant gegen beliebige stetige Verbiegungen der Umläufe  $\mathfrak{C}_\lambda$ .

#### Anhang 6: Ergänzung zu § 4.4. Herleitung von (4.4.79–81)

Aus zwei in ([40], S. 36) angegebenen Hilfsgleichungen leiten wir zunächst die folgenden Hilfsformeln ab:

$$\int_0^{2\pi} \cotg \frac{\varphi'' - \varphi}{2} \sin(\varphi' - \varphi'') \, d\varphi'' = 2\pi \cos(\varphi' - \varphi) \quad (\text{A6.1})$$

$$\int_0^{2\pi} \cotg \frac{\varphi'' - \varphi}{2} \cos(\varphi' - \varphi'') \, d\varphi'' = -2\pi \sin(\varphi' - \varphi) \quad (\text{A6.2})$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi'' - \varphi) \cotg \frac{\varphi' - \varphi''}{2} \, d\varphi'' = -2\pi \sin(\varphi' - \varphi) \quad (\text{A6.3})$$

Für das erste Glied von  $k_{11}^{(2)}(s, s')$  in (4.4.77) erhalten wir dann

$$\oint_{(S)} k_{11}(s, s'') k_{11}(s'', s') ds'' = \frac{1}{8\pi a} \left( \frac{(3\mathcal{M} - 1)^2}{8\mathcal{M}^2} \cos(\varphi' - \varphi) + \frac{1}{\mathcal{M}^2} \right) \quad (\text{A6.4})$$

und für das zweite Glied von  $k_{22}^{(2)}(s, s')$

$$\oint_{(S)} k_{22}(s, s'') k_{22}(s'', s') ds'' = \frac{1}{8\pi a} \left( \frac{(3\mathcal{M} - 1)^2}{8\mathcal{M}^2} \cos(\varphi' - \varphi) + 1 \right) \quad (\text{A6.5})$$

Das zweite Glied von  $k_{11}^{(2)}(s, s')$  und das erste Glied von  $k_{22}^{(2)}(s, s')$  erhält man aus dem folgenden Integralausdruck

$$\begin{aligned} \oint_{(S)} k_{12}(s, s'') k_{21}(s'', s') ds'' &= \oint_{(S)} k_{21}(s, s'') k_{12}(s'', s') ds'' \\ &= -\frac{1}{16\pi^2 a} \oint_{\partial} \left( \frac{(\mathcal{M} - 1)^2}{4\mathcal{M}^2} \cotg \frac{\varphi'' - \varphi}{2} \cotg \frac{\varphi' - \varphi''}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3\mathcal{M} - 1)^2}{4\mathcal{M}^2} \sin(\varphi'' - \varphi) \sin(\varphi' - \varphi'') - \frac{\mathcal{M} - 1}{2\mathcal{M}} \frac{3\mathcal{M} - 1}{2\mathcal{M}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \cotg \frac{\varphi'' - \varphi}{2} \sin(\varphi' - \varphi'') + \sin(\varphi'' - \varphi) \cotg \frac{\varphi' - \varphi''}{2} \right) \right) d\varphi'' \quad (\text{A6.6}) \end{aligned}$$

Hier liefert das zweite Glied der rechten Seite ein gewöhnliches Integral, während das erste mit Hilfe der *Hilbertschen* Formel und das dritte mit (A6.1) auszurechnen ist. Symbolisieren wir das erste Glied der *Hilbertschen* Formel (4.4.78) durch die *Diracsche* Deltafunktion  $\delta^{(1)}(s' - s)$  unter dem Integralzeichen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \oint_{(S)} (\dots) ds'' &= \frac{(\mathcal{M} - 1)^2}{16\mathcal{M}^2} \delta^{(1)}(s' - s) - \frac{1}{8\pi a} \frac{(\mathcal{M} - 1)^2}{4\mathcal{M}^2} \\ &\quad + \frac{1}{8\pi a} \frac{(3\mathcal{M} - 1)^2}{8\mathcal{M}^2} \cos(\varphi' - \varphi) + \frac{1}{8\pi a} \frac{(\mathcal{M} - 1)(3\mathcal{M} - 1)}{4\mathcal{M}^2} \cos(\varphi' - \varphi) \\ &= \frac{(\mathcal{M} - 1)^2}{16\mathcal{M}^2} \delta^{(1)}(s' - s) \\ &\quad + \frac{1}{8\pi a} \left( \frac{(7\mathcal{M} - 5)(3\mathcal{M} - 1)}{8\mathcal{M}^2} \cos(\varphi' - \varphi) - \frac{(\mathcal{M} - 1)^2}{4\mathcal{M}^2} \right) \quad (\text{A6.7}) \end{aligned}$$



Die Komponenten  $k_{12}^{(2)}(s, s') = k_{21}^{(2)}(s, s')$  setzen sich aus gewöhnlichen Integralen und *Cauchy*schen Hauptwerten nach (A6.1–3) zusammen; für das erste Glied erhält man

$$\begin{aligned} \oint_{(S)} k_{11}(s, s'') k_{12}(s'', s') ds'' &= \oint_{(S)} k_{21}(s, s'') k_{11}(s'', s') ds'' \\ &= -\frac{1}{8\pi a} \frac{(3\mathcal{M}-1)(5\mathcal{M}-3)}{8\mathcal{M}^2} \sin(\varphi' - \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A6.8})$$

und für das zweite Glied

$$\begin{aligned} \oint_{(S)} k_{12}(s, s'') k_{22}(s'', s') ds'' &= \oint_{(S)} k_{22}(s, s'') k_{21}(s'', s') ds'' \\ &= -\frac{1}{8\pi a} \frac{(3\mathcal{M}-1)(5\mathcal{M}-3)}{8\mathcal{M}^2} \sin(\varphi' - \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A6.9})$$

Trennen wir den Beitrag der Deltafunktion in (A6.7) ab, fassen zusammen und setzen in (4.4.76) ein, so erhalten wir (4.4.79–80) und damit auch (4.4.81).

## Literatur

- [1] *A. E. H. Love*: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. University Press, Cambridge 1952.
- [2] *I. S. Sokolnikoff*: Mathematical Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York–Toronto–London 1956.
- [3] *I. Babuška, K. Rektorys* und *F. Vyčichlo*: Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme. Akademie-Verlag, Berlin 1960.
- [4] *L. Föppl*: Drang und Zwang, Bd. 3. Leibniz Verlag, München 1947. Vgl. auch [163].
- [5] *N. I. Muskhelishvili*: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Noordhoff, Groningen–Holland 1956.
- [6] *L. M. Milne-Thomson*: Plane Elastic Systems. Springer-Verlag, Berlin 1960.
- [7] *S. Timoshenko, J. N. Goodier*: Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York–Toronto–London 1951.
- [8] *L. Rongved* und *J. T. Frasier*: Displacement Discontinuity in the Elastic Half-Space. J. Appl. Mech. **25** (1958), S. 125.
- [9] *H. Neuber*: Kerbspannungslehre. Springer-Verlag, Berlin 1958.
- [10] *G. N. Savin*: Spannungserhöhung am Rande von Löchern. Verlag Technik, Berlin 1956.
- [11] *R. D. Mindlin* und *D. H. Cheng*: Nuclei of Strain in the Semi-Infinite Solid. J. Applied Physics **21** (1950), S. 926.
- [12] IUTAM-Colloquium: Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, edited by *W. Olszak*. Polish Academy of Sciences, Warsaw 1958.  
*W. Olszak* und *J. Rychlewski*: Nichthomogenitäts-Probleme im elastischen und vorplastischen Bereich. Öster. Ing.-Archiv **15** (1961), S. 130.  
*W. Olszak* und *S. Zahorski*: Elastisch-plastische Biegung des nichthomogenen orthotropen Bogenstreifens. Öster. Ing.-Archiv **13** (1959), S. 106.
- [13] *H. Bufler*: Scheibe mit endlicher, elastischer Versteifung. VDI-Forschungsheft **485** (1961). Vgl. auch [128].  
*H. Bufler*: Die Bestimmung des Spannungs- und Verschiebungszustandes eines

- geschichteten Körpers mit Hilfe von Übertragungsmatrizen. Ing.-Archiv **31** (1962), S. 229.
- H. Buefler*: Der Spannungszustand in einem aus zwei elastischen Halbscheiben bestehenden Verbundkörper. Ing.-Archiv **29** (1960), S. 233.
- H. Buefler*: Die inhomogene elastische Schicht. Vortrag GAMM-Tagung Karlsruhe 1963. Erscheint in ZAMM und Ing.-Archiv.
- [14] *R. Trostel*: Die Grundgleichungen für den Verbund bei Stahlbeton-Rechteckplatten. Ing.-Archiv **30** (1961), S. 1.
- [15] *G. Holzmann*: Ein Beitrag zur Kenntnis des ebenen Spannungszustandes bei veränderlichem Elastizitätsmodul. Dissertation Braunschweig 1956, unveröffentlicht.
- [16] *G. Rieder*: Eigenspannungen in unendlichen geschichteten und elastisch anisotropen Medien, insbesondere in Weißschen Bezirken und in geschichteten Platten. Abh. Braunschw. Wiss. Ges. **11** (1959), S. 20.
- [17] *K. Schmidt*: Zum Festigkeitsverhalten von Zweistoff-Bauelementen. VDI-Z. **102** (1960), S. 829.
- [18] *H. Hackmann*: Verschiebungen und Spannungen in dünnen geschichteten Platten. Dissertation Braunschweig 1961.
- [19] *J. D. Eshelby*: Elastic Inclusions and Inhomogeneities. Progr. Solid Mech. **2** (1961), S. 87.
- [20] *R. J. Knops*: The Use of Poisson's Ratio in Studying Certain Non-Homogeneous Elastic Inclusions. ZAMM **40** (1960), S. 541.
- [21] *E. H. Mansfield*: On the Analysis of Elastic Plates of Variable thickness. Quart. J. Mech. Appl. Math. **15** (1962), S. 167.
- [22] *A. Kacner*: Bending of Thin Anisotropic Plates of Variable Thickness. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn. **9** (1961), S. 201.
- [23] *W. Voigt*: Lehrbuch der Kristallphysik. Teubner-Verlag, Leipzig-Berlin 1910.
- [24] *J. F. Nye*: Physical properties of crystals. Clarendon Press, Oxford 1957.
- [25] *A. Seeger* und *G. Schöck*: Die Aufspaltung von Versetzungen in Metallen dichtester Kugelpackung. Acta Metallurgica **1** (1953), S. 519.
- [26] *A. Seeger*: Theorie der Gitterfehlstellen. Handbuch der Physik, Bd. VII/1, herausg. von *S. Flügge*, S. 383-665. Springer, Berlin 1955.
- [27] *E. Kröner*: Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer-Verlag, Berlin 1958.
- [28] *E. Kröner*: Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Archive Rat. Mech. Anal. **4** (1960), S. 273.  
Bemerkungen zum geometrischen Grundgesetz der allgemeinen Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Archive Rat. Mech. Anal. **7** (1961), S. 78.
- [29] *L. Collatz*: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer-Verlag, Berlin 1955, 2. Auflage.
- [30] *R. V. Southwell*: Relaxation Methods in Theoretical Physics, Vol. II. Clarendon Press, Oxford 1956.
- [31] *M. Engel*, *Th. Günsburg*, *H. Rutishauser*, *E. Stiefel*: Refined Methods for Computation of the Solution and the Eigenvalues of Self-Adjoint Boundary Value Problems. Mitt. Inst. Angew. Math., Eidg. T. H. Zürich Nr. 8. Birkhäuser, Basel-Stuttgart 1959.
- [32] *H. Schaefer*: Die Latteninterpolation bei einer Funktion von zwei Veränderlichen. ZAMP **14** (1963) S. 90.
- [33] *J. L. Synge*: The Hypercircle in Mathematical Physics. University Press, Cambridge 1957.
- [34] *W. Prager* and *J. L. Synge*: Approximations in Elasticity based on the Concept of Function Space. Quart. Appl. Math. **5** (1947), S. 241.
- [35] *J. L. Synge*: The Method of the Hypercircle in Elasticity when Body Forces are present. Quart. Appl. Math. **6** (1948), S. 15.

- [36] *S. Bergmann*: Über die Bestimmung der elastischen Spannungen und Verschiebungen in einem konvexen Körper. *Math. Annalen* **98** (1927), S. 248.
- [37] *S. Bergman* and *M. Schiffer*: *Kernel Functions and Differential Equations in Mathematical Physics*. Academic Press, New York 1953.
- [38] *J. Nowinski* and *Ph. Rabinowitz*: The Method of the Kernel Function in the Theory of Elastic Plates. *ZAMP* **13** (1962), S. 26.
- [39] *J. Szmelter*, *T. Sulikowski* and *J. Lipiński*: Bending of a Rectangular Plate Clamped at One Edge. *Arch. Mech.* **13** (1961), S. 63.
- [40] *W. Schmiedler*: *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik*. Geest & Portig, Leipzig 1950.
- [41] *S. G. Mikhlin*: *Integral Equations*. Pergamon Press, London 1957.
- [42] *N. I. Muskhelishvili*: *Singular Integral Equations*. Noordhoff, Groningen 1953.
- [43] *E. Trefftz*: *Mathematische Elastizitätstheorie*. Handbuch der Physik, herausg. von H. Geiger und K. Scheel, Bd. 6, Mechanik der elastischen Körper, S. 47.
- [44] *F. Tölke*: *Talsperren*. Handbibliothek für Bauing. 3. Teil Bd. 9.
- [45] *W. Nowacki*: Formulation of a Boundary Problem of the Theory of Elasticity with Mixed Boundary Conditions. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn.* (4) **10** (1962), S. 71.
- [46] *O. Tedone*: Allgemeine Theoreme der mathematischen Elastizitätslehre. *Enzykl. math. Wiss.* **4** (1904), S. 55.
- [47] *I. Babuška* and *J. Kautsky*: Ein Beitrag zur Theorie der Kerbspannungen. *ZAMM* **41** (1961), S. 420.
- [48] *W. D. Kupradse*: *Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.
- [49] *E. Weinel*: Die Integralgleichung des ebenen Spannungszustandes und der Plattentheorie. *ZAMM* **11** (1931), S. 349.
- [50] *M. Hetényi*: Solution of Boundary Value Problems in Elasticity by a Method of Iteration. In: *Partial Differential Equations and Continuum Mechanics*, ed. R. E. Langer, S. 351. Madison (Wisconsin) 1961.
- [51] *E. Kröner*: Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen. *Z. Physik* **136** (1953), S. 402.
- [52] *F. R. N. Nabarro*: The Mathematical Theory of Stationary Dislocations. *Advances in Physics* **1** (1952).
- [53] *F. Kroupa*: Continuous Distribution of Dislocation Loops. *Czechosl. J. Phys.* **B 12** (1962), S. 191.
- [54] *W. Prager*: Die Druckverteilung an Körpern in ebener Potentialströmung. *Phys. Z.* **29** (1928), S. 865.
- [55] *E. Martensen*: Die Berechnung der Druckverteilung an dicken Gitterprofilen mit Hilfe einer Fredholmischen Integralgleichung 2. Art. *Mitt. MPI Strömungsforsch. und AVA* **23** (1959), S. 1.
- [56] *W. H. Isay*: Zur Berechnung der Unterwassertragflügel bei wellenförmiger Anströmung. *Ing. Arch.* **30** (1961), S. 201.
- [57] *K. Gersten*: Tragflügeltheorie bei Unterschallgeschwindigkeit. *Jahrb. WGL* 1958, S. 25.
- [58] *W. Richter*: Berechnung der Druckverteilung von ebenen Schaufelgittern mit stark gewölbten dicken Profilen bei inkompressibler Strömung. *Ing. Arch.* **29** (1960), S. 351.
- [59] *H. Schaefer*: Die vollständige Analogie Scheibe-Platte. *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.* **8** (1956), S. 142.
- [60] *H. Schaefer*: Die drei Spannungsfunktionen des zweidimensionalen ebenen Kontinuums. *Österr. Ing. Arch.* **10** (1956), S. 267.

- [61] *H. Hoppe*: Die Behandlung von Randwertproblemen bei der elastischen Kreisringplatte mit Hilfe von Spannungsfunktionen. Diplomarbeit Braunschweig 1961, unveröffentlicht.
- [62] *J. W. Worobjow*: Die Momentenmethode in der angewandten Mathematik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.
- [63] *L. W. Kantorowitsch und W. I. Krylow*: Näherungsmethoden der höheren Analysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.
- [64] *L. W. Kantorowitsch*: Funktsionalnyi analiz i prikladnaia matematika (Funktionalanalysis und angewandte Mathematik). Uspekhi mat. nauk **3**, Nr. 6, 89–184 (1948). Engl. Übers.: NBS Project 1101–10–5100, Rep. 1509, National Bureau of Standards, März 1952.
- [65] *J. W. Schmidt*: Konvergenz und Fehlerabschätzung bei verallgemeinerter Iteration. Archive Rat. Mech. Anal. **6** (1960), S. 261.
- [66] *F. Riesz und B. Sz. Nagy*: Vorlesungen über Funktionalanalysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.
- [67] *A. Lichnerowicz*: Lineare Algebra und lineare Analysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.
- [68] *R. Zurmühl*: Matrizen. Springer-Verlag, Berlin 1958, 2. Auflage.
- [69] *E. Bodewig*: Matrix Calculus. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1956.
- [70] *R. Bellman*: Introduction to Matrix Analysis. McGraw-Hill Book Company, New York 1960.
- [71] *G. Prange*: Das Extremum der Formänderungsarbeit (Die Variations- und Minimalprinzipie der Statik der Baukonstruktionen). Habilitationsschrift Hannover 1916, unveröffentlicht. Vgl. auch [166].
- [72] *L. Collatz*: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Z. Rechentechnik und Automation (mtw) **3** (1961), S. 101.
- [73] *R. Courant und D. Hilbert*: Methoden der mathematischen Physik I. Springer-Verlag, Berlin 1931, 2. Auflage.
- [74] *R. Warre*: L'itération directe des opérateurs hermitiens et deux théories qui en dépendent. Comment. Math. Helv. **15** (1943), S. 299.  
L'itération directe des opérateurs hermitiens. Ibidem **16** (1944), S. 65.
- [75] *H. Heuser*: Eigenwerttheorie symmetrisierbarer finiter Operatoren. Vortrag GAMM-Tagung Bonn 1962. Erscheint in der Math. Zeitschrift.
- [76] *W. T. Reid*: Symmetrizable Completely Continuous Transformations in Hilbert Space. Duke Math. J. **18** (1951), S. 41.
- [77] *A. C. Zaenen*: Linear Analysis. Amsterdam-Groningen 1953.
- [78] *C. E. Pearson*: Theoretical Elasticity. Harvard University Press, Cambridge (Mass.) 1959.
- [79] *U. Stille*: Messen und Rechnen in der Physik. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1961.
- [80] *W. Quade*: Über die algebraische Struktur des Größenkalküls in der Physik. Abh. Braunsch. Wiss. Ges. **13** (1961), S. 24.
- [81] *M. Lagally*: Vorlesungen über Vektor-Rechnung. Geest & Portig, Leipzig 1949.
- [82] *W. Gibbs*: Vector Analysis. Dover Publications, New York 1960.
- [83] *W. R. Seugling*: An Iteration Method for the Solution of Finite Deformation Problems in Elasticity. Arch. Mech. Stos. **11** (1959), S. 3.
- [84] *E. Kröner und A. Seeger*: Nicht-Lineare Elastizitätstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Arch. Rat. Mech. Anal. **3** (1959), S. 97.
- [85] *F. D. Murnaghan*: Finite Deformation of an Elastic Solid. Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1951.
- [86] *A. E. Green und J. E. Adkins*: Large Elastic Deformations. Clarendon Press, Oxford 1960.
- [87] *C. Truesdell und R. Toupin*: The Classical Field Theories. Handbuch der Physik, herausg. von *S. Flügge*, Bd. III/1, S. 226. Springer, Berlin 1960.
- [88] *I. N. Sneddon*: Functional Analysis. Handbuch der Physik, Bd. II, Mathematische Methoden II, herausgegeben von *S. Flügge*, Springer, Berlin 1955.

- [89] *L. Schwartz*: Théorie des distributions Bd. I. Hermann, Paris 1957.
- [90] *I. M. Gelfand* und *G. E. Schilow*: Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen), Bd. I. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.
- [91] *A. Erdélyi*: Operational Calculus and Generalized Functions. Holt, Rinehart & Winston, New York 1962.
- [92] *A. Duschek* und *A. Hochrainer*: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Bd. I—III. Springer, Wien 1948—1955.
- [93] *G. Rieder*: Die Darstellung innerer Spannungszustände durch Extraspannungen und Extradehnungen und ihre Anwendung auf Probleme der technischen Magnetisierungskurve. Examensarbeit Stuttgart 1955, unveröffentlicht.
- [94] *G. Rieder*: Spannungen und Dehnungen im gestörten elastischen Medium. Z. Naturforschung **11a** (1956), S. 171 (Berichtigung in [16, 95]).
- [95] *G. Rieder*: Plastische Verformung und Magnetostriktion. Z. angew. Physik **9** (1957), S. 187.
- [96] *G. Rieder*: Mechanische Arbeit bei plastischen Vorgängen. Z. angew. Physik **10** (1958), S. 140.
- [97] *G. Rieder*: Der Beitrag des elastischen Spannungsfeldes zur freien Energie nicht-elastischer Zustandsänderungen. Materialprüfung **2** (1960), S. 429.
- [98] *G. Rieder*: Topologische Fragen in der Theorie der Spannungsfunktionen. Abh. Braunsch. Wiss. Ges. **12** (1960), S. 4.
- [99] *W. Günther*: Zur Statik und Kinematik des *Cosseratschen* Kontinuums. Abh. Braunsch. Wiss. Ges. **10** (1958), S. 195.
- [100] *A. E. Green* und *W. Zerna*: Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford 1960.
- [101] *J. D. Eshelby*: The Continuum Theory of Lattice Defects. In: Solid State Physics III. New York, Acad. Press 1956, S. 79.
- [102] *E. Sternberg* und *R. A. Eubanks*: On the Concept of Concentrated Loads and an Extension of the Uniqueness Theorem in the Linear Theory of Elasticity. J. Rat. Mech. Anal. **4** (1955), S. 135.
- [103] *M. E. Gurtin* und *E. Sternberg*: On the First Boundary-Value Problem of Linear Elastostatics. Arch. rat. Mech. Anal. **6** (1960), S. 177.
- [104] *E. Beltrami*: Osservazioni sulla Nota precedente. Atti Accad. naz. Lincei, Cl. fis. mat. natur. V. Ser. **1/1** (1892), S. 141.
- [105] *W. I. Bloch*: Funktsii napriazhenii v teorii uprugosti (Die Spannungsfunktionen in der Elastizitätstheorie). Prikl. Mat. Mech. **14** (1950), S. 415.
- [106] *W. Prager*: Einführung in die Kontinuumsmechanik. Birkhäuser, Basel 1961.
- [107] *V. Volterra* und *E. Volterra*: Sur les distorsions des corps élastiques. Gauthier-Villars, Paris 1960.  
*V. Volterra*: Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. Ann. Ec. Norm. Sup. **24** (1907), S. 401.
- [108] *W. L. Indenbom*: Teoremy vzaimnosti i funktsii vliianiia dlia tenzora plotnosti dislokatsii i tenzora nesovmestnosti deformatsii (Reziprozitätssätze und Einflußfunktionen für die Tensoren der Versetzungsdichte und der Inkompatibilität). Doklady Akad. Nauk SSSR **128** (1959), S. 906.
- [109] *E. Reissner*: On Variational Principles in Elasticity. Proc. Symp. Appl. Math. **8** (1958), S. 1.
- [110] *E. Reissner*: On some Variational Theorems in Elasticity. In: Problems of Continuum Mechanics. Soc. Indust. Appl. Math. Philadelphia 1961, S. 370.
- [111] *H. Reißner*: Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen. ZAMM **11** (1931), S. 1.
- [112] *E. Melan* und *H. Parkus*: Wärmespannungen. Springer, Wien 1953.
- [113] *H. Parkus*: Instationäre Wärmespannungen. Springer, Wien 1959.
- [114] *C. Truesdell*: Invariant and Complete Stress Functions for General Continua. Archive Rat. Mech. Anal. **4** (1959), S. 1.

- [115] *G. Rieder*: Zur Entstehung und Berechnung der Gußspannungen. Vortrag Czechosl. Conf. „Equadiff“ Prag 1962. Erscheint in der ZAMM.
- [116] *H. Schaefer*: Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums, statische Deutung und Randwerte. Ing. Arch. **28** (1959), S. 291.
- [117] *G. Peretti*: Significato del tensore arbitrario che interviene nell'integrale generale delle equazione della statica dei continui. Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **3** (1949), S. 77.
- [118] *W. Günther*: Spannungsfunktionen und Verträglichkeitsbedingungen der Kontinuumsmechanik. Abh. Braunsch. Wiss. Ges. **6** (1954), S. 207.
- [119] *R. V. Southwell*: Castiglione's Principle of Minimum Strain Energy. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **154** (1936), S. 4.
- [120] *B. A. Bilby*: Continuous Distributions of Dislocations. Progress in Solid Mechanics **1** (1960), S. 331.
- [121] *K. Kondo*: RAAG Memoirs of the Unifying Study of Basic Problems in Engineering and Physical Sciences by means of Geometry. Vol. I, Tokyo 1955. Vol. II, Tokyo 1958.
- [122] *A. P. Calderon und A. Zygmund*: On the Existence of certain Singular Integrals. Acta Mathematica **88** (1952), S. 85.
- [123] *J. B. Diaz*: Upper and Lower Bounds for Quadratic Functionals. Collectanea Mathematica, Seminario Matematico de Barcelona **4** (1951), Heft 2, S. 1.
- [124] *J. B. Diaz und A. Weinstein*: Schwarz' Inequality and the Methods of Rayleigh-Ritz and Trefftz. J. Math. Phys. **26** (1947), S. 133.
- [125] *J. B. Diaz und H. J. Greenberg*: Upper and Lower Bounds for the Solution of the First Bi-Harmonic Boundary Value Problem. J. Math. Phys. **27** (1948), S. 193.
- [126] *G. Rieder*: Die Randbedingungen für den Spannungsfunktionsensor an ebenen und gekrümmten Oberflächen. Braunschweig 1963, unveröffentlicht.
- [127] *G. Colonnetti*: Su di una reciprocità tra deformazioni e distorsioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur. V. Ser. **24/1** (1915), S. 404.
- [128] *A. Pflüger*: Die Scheibe mit Linienpflaster. Abh. Braunsch. Wiss. Ges. **12** (1960), S. 66. Vgl. auch [13].
- [129] *A. Föppl*: Vorlesungen über Technische Mechanik. Bd. V. Teubner, Berlin und Leipzig 1907, 1922.
- [130] *H. Bückner*: Die praktische Behandlung von Integral-Gleichungen. Springer-Verlag, Berlin 1952.
- [131] *K. Friedrichs*: Die Randwert- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten. (Anwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung). Mathematische Annalen **98** (1928), S. 205.
- [132] *H.-J. Töpfer*: Über Eindeutigkeit und praktische Berechnung der Lösungen von Randwertaufgaben in der Theorie der orthogonal-anisotropen Platten. ZAMM **42** (1962), S. 142.
- [133] *P. Seggelke*: Rechenversuche zur Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Berechnung der Spannungen und Verschiebungen in randbelasteten Scheiben. Diplomarbeit Braunschweig 1961, unveröffentlicht.
- [134] *J. Golecki*: Approximate Method of Determining the Distribution of Stress in the Neighbourhood of Folds. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn. **9** (1961), S. 383.
- [135] *L. Berg*: Lösungsverfahren für singuläre Integralgleichungen. Teil I: Math. Nachr. **14** (1956), S. 193.  
Teil II: Wiss. Z. Uni. Rostock 4. Jahrg. 1954/55 Heft 3, S. 381.
- [136] *G. Giraud*: Equations à intégrales principales. Ann. Sci. Ecole Normale Sup. **51** (1934), S. 251.  
Sur une classe d'équations linéaires où figurent des valeurs principales d'intégrales simples. Ann. Sci. Ecole Normale Sup. **56** (1939), S. 119.

- [137] W. J. Trjitzinsky: Multidimensional Principal Integrals, Boundary Value Problems and Integral Equations. *Acta Math.* **84** (1950), S. 1.
- [138] L. W. Kantorowitsch: O priblizhenom vychislenii nekotorykh tipov opredelennykh integralov i drugikh primeneniakh metoda vydeleniia osobennostei. (Über die näherungsweise Berechnung einiger Typen von bestimmten Integralen und über andere Anwendungen der Methode der Abspaltung von Singularitäten). *Mat. Sbornik* **41** (1934), S. 235.
- [139] G. N. Pykhiteev: On the Evaluation of Certain Integrals with Regular Kernels of the Cauchy Type. *PMM* **24** (1960), S. 1690, übers. von Prikl. Mat. Mech.
- [140] Hütte, Bd. 1. Verlag Ernst & Sohn, Berlin.
- [141] Jahnke-Emde: Tafeln höherer Funktionen. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1948.
- [142] R. Rothe: Höhere Mathematik, Teil I—III. Teubner Verlag, Leipzig—Berlin 1941.
- [143] J. Golecki: Displacement Functions for an Isotropic Incompressible Elastic Solid. *Bull. Acad. Pol. Scie., ser. scie. techn.* **7** (1959), S. 265.  
The Stress Function for a Two-Dimensional Incompressible Non-Homogeneous Body in the Case of Plane Stress. *Bull. Acad. Pol. Scie., ser. scie. techn.* **7** (1959), S. 371.
- [144] E. Durand: Solutions numériques des équations algébriques, Tome II. Masson & Cie, Paris 1961.
- [145] G. Wiarda: Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Teubner Verlag, Leipzig 1930.
- [146] H. Bielzy: Optimale Parameterwahl bei einer Klasse von Iterationsverfahren. *ZAMM* **41** (1961) T 7.
- [147] H. A. Antosiewicz and W. C. Rheinboldt: Numerical Analysis and Functional Analysis. In: A Survey of Numerical Analysis, ed. J. Todd, S. 485. McGraw-Hill, New York—London 1962.
- [148] E. Trefftz: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. *Proc. Second Int. Congress Appl. Mechanics*, Zürich 1927, S. 131.
- [149] S. Falk und P. Langemeyer: Das Jacobische Rotationsverfahren für reellsymmetrische Matrizenpaare I, II. *Elektronische Datenverarbeitung*, 1960, S. 30.
- [150] P. Frank und R. v. Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. II. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1935, 1961.
- [151] D. K. Faddejew und W. N. Faddejewa: Vychislitel'nye metody lineinoi algebrы (Rechenmethoden der linearen Algebra). Fizmatgiz, Moskau 1960. Dt. Übers. erscheint demnächst bei Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin und Vieweg & Sohn, Braunschweig.
- [152] S. Falk: Einschließungssätze für Eigenwerte und -vektoren normaler Matrizenpaare. *Wiss. Z. der T. U. Dresden* **10** (1961), S. 1033. Vgl. auch S. Falk, *ZAMM* 1963, im Druck.
- [153] W. Bollermann: Eine Fehlerabschätzung zu Eigenlösungen bei linearen Eigenwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen. *ZAMM* **41** (1961) T 9.
- [154] E. Kamke: Weinstens Einschließungssatz. *Math. Zeitschr.* **45** (1939), S. 788.
- [155] L. Collatz: Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung. *Akad. Verl.-Ges.*, Leipzig 1945.
- [156] S. Bergman: Integral Operators in the Theory of Linear Partial Differential Equations. Springer, Berlin 1961.
- [157] E. Stiefel: Relaxationsmethoden bester Strategie zur Lösung linearer Gleichungssysteme. *Comm. Math. Helv.* **29** (1955), S. 157.
- [158] E. J. Craig: The N-Step Iteration Procedures. *J. Math. Phys.* **34** (1955), S. 64.
- [159] E. Kröner: Über die Berechnung der Verzerrungsenergie bei Keimbildung in Kristallen. *Acta Metallurgica* **2** (1954), S. 302.
- [160] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie. Springer, Berlin 1932.
- [161] S. G. Michlin: Variationsmethoden der mathematischen Physik. Akademie-Verlag, Berlin 1962.

- [162] *M. Rószá*: Berechnung von Tragwerken mittels Ziffernrechenautomaten. Wiss. Z. d. Hochsch. f. Arch. u. Bauwesen Weimar 5 (1961), S. 455.
- [163] *K. Girkmann*: Flächentragwerke. Springer, Wien 1946–1959.
- [164] *A. Föppl*: Vorlesungen über Technische Mechanik. 5. Band: Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. Teubner, Leipzig 1907.
- [165] *R. D. Mindlin* and *M. G. Salvadori*: Analogies. In: Handbook of Experimental Stress Analysis, ed. *M. Hetényi*, Chap. 16, S. 700. Wiley & Sons, New York und Chapman & Hall, London 1950–1957.
- [166] *P. Funk*: Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik. Springer, Berlin 1962.